

RENATO LEONI

**Analisi semplice delle
corrispondenze**
(Parte prima)

UNIVERSITÀ DI FIRENZE
DIPARTIMENTO DI STATISTICA "G. PARENTI"
FIRENZE, 2007

Questo lavoro è destinato a un uso personale e ne è vietata la commercializzazione.

1 PREMESSA

Essenzialmente, l'*analisi semplice delle corrispondenze* (ASC) ha come obiettivo lo studio della struttura di una distribuzione doppia di frequenze.

Della ASC esistono varie versioni. Una di queste, probabilmente la più diffusa, è esposta in questo lavoro ⁽¹⁾.

(1) Esempi numerici, basati sia su dati fittizi sia su dati reali, sono forniti a parte. Le nozioni di algebra lineare, necessarie per una piena comprensione degli argomenti qui esposti, sono presentate in [14].

2 I DATI DI BASE E LA LORO STRUTTURA ALGEBRICA

2.1 I DATI DI BASE

2.1.1 DISTRIBUZIONI DI FREQUENZE ASSOLUTE

Si consideri una distribuzione di frequenze assolute riferita a due caratteri qualitativi sconnessi A e B le cui modalità sono date, rispettivamente, da a_1, \dots, a_p e b_1, \dots, b_q .

La distribuzione in questione si può rappresentare nei termini del prospetto seguente (tavola di contingenza)

Modalità di A	Modalità di B			Totale
	b_1	\dots	b_q	
a_1	n_{11}	\dots	n_{1q}	n_{1+}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_p	n_{p1}	\dots	n_{pq}	n_{p+}
Totale	n_{+1}	\dots	n_{+q}	n

in cui ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$)

- n_{ij} indica la frequenza assoluta delle unità che presentano congiuntamente la modalità a_i di A e la modalità b_j di B;
- $n_{i+} = \sum_j^q n_{ij}$ e $n_{+j} = \sum_i^p n_{ij}$ indicano le frequenze assolute marginali ⁽²⁾;
- $n = \sum_i^p \sum_j^q n_{ij} = \sum_i^p n_{i+} = \sum_j^q n_{+j}$ indica la numerosità complessiva della collettività esaminata.

La distribuzione di frequenze assolute in questione dà luogo alle p distribuzioni di frequenze assolute di B condizionate alle modalità di A, ciascuna delle quali è rappresentata da

(2) Conveniamo che tali frequenze marginali siano positive.

Modalità di B	b_1	\dots	b_q	Totale
Frequenze assolute condizionate	n_{i1}	\dots	n_{iq}	n_{i+}

e alla distribuzione di frequenze assolute marginali di B, rappresentata da

Modalità di B	b_1	\dots	b_q	Totale
Frequenze assolute marginali	n_{+1}	\dots	n_{+q}	n

La distribuzione di frequenze assolute di cui sopra dà luogo poi alle q distribuzioni di frequenze assolute di A condizionate alle modalità di B, ciascuna delle quali è rappresentata da

Modalità di A	a_1	\dots	a_p	Totale
Frequenze assolute condizionate	n_{1j}	\dots	n_{pj}	n_{+j}

e alla distribuzione di frequenze assolute marginali di A, rappresentata da

Modalità di A	a_1	\dots	a_p	Totale
Frequenze assolute marginali	n_{1+}	\dots	n_{p+}	n

2.1.2 DISTRIBUZIONI DI FREQUENZE RELATIVE

(i) Si considerino le p distribuzioni di frequenze relative di B condizionate alle modalità di A, ciascuna delle quali è rappresentata da

Modalità di B	b_1	\dots	b_q	Totale
Frequenze relative condizionate	$\frac{n_{i1}}{n_{i+}}$	\dots	$\frac{n_{iq}}{n_{i+}}$	1

e la distribuzione di frequenze relative marginali di B, rappresentata da

Modalità di B	b_1	\dots	b_q	Totale
Frequenze relative marginali	$\frac{n_{+1}}{n}$	\dots	$\frac{n_{+q}}{n}$	1

Riassuntivamente, tali distribuzioni di frequenze relative si possono rappresentare mediante il prospetto seguente

Modalità di A	Modalità di B			Totale
	b_1	\dots	b_q	
a_1	$\frac{n_{11}}{n_{1+}}$	\dots	$\frac{n_{1q}}{n_{1+}}$	1
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_p	$\frac{n_{p1}}{n_{p+}}$	\dots	$\frac{n_{pq}}{n_{p+}}$	1
	$\frac{n_{+1}}{n}$	\dots	$\frac{n_{+q}}{n}$	1

Ciò premesso, si consideri la matrice

$$\mathbf{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{1+}} & \dots & \frac{n_{1q}}{n_{1+}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{n_{p1}}{n_{p+}} & \dots & \frac{n_{pq}}{n_{p+}} \end{bmatrix}.$$

Posto ($j = 1, \dots, q$)

$$\mathbf{x}_{(1)j} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{1j}}{\mathbf{n}_{1+}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{pj}}{\mathbf{n}_{p+}} \end{bmatrix}$$

e ($i = 1, \dots, p$)

$$\mathbf{x}_{(1)i} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \end{bmatrix},$$

possiamo scrivere

$$\mathbf{X}_{(1)} = [\mathbf{x}_{(1)1} \cdots \mathbf{x}_{(1)q}] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{(1)p} \end{bmatrix}.$$

I q vettori $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)q}$ sono detti genericamente *variabili* associate alla matrice $\mathbf{X}_{(1)}$; a loro volta, i p vettori $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$, che caratterizzano le distribuzioni di frequenze relative di B condizionate alle modalità di A , sono denominati *profili riga* e la matrice $\mathbf{X}_{(1)}$ è detta *matrice dei profili riga*.

Infine, il vettore

$$\mathbf{g}_{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{+1}}{\mathbf{n}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix},$$

che caratterizza la distribuzione di frequenze relative marginali di B , è detto *profilo marginale di riga*.

(ii) Successivamente, si considerino le q distribuzioni di frequenze relative di A condizionate alle modalità di B , ciascuna delle quali è rappresentata da

Modalità di A	a_1	\dots	a_p	Totale
Frequenze relative condizionate	$\frac{n_{1j}}$	\dots	$\frac{n_{pj}}$	1

e la distribuzione di frequenze relative marginali di A, rappresentata da

Modalità di A	a_1	\dots	a_p	Totale
Frequenze relative marginali	$\frac{n_{1+}}$	\dots	$\frac{n_{p+}}$	1

Riassuntivamente, tali distribuzioni di frequenze relative si possono rappresentare mediante il prospetto seguente

Modalità di A	Modalità di B			
	b_1	\dots	b_q	
a_1	$\frac{n_{11}}$	\dots	$\frac{n_{1q}}$	$\frac{n_{1+}}$
	n_{+1}		n_{+q}	n
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_p	$\frac{n_{p1}}$	\dots	$\frac{n_{pq}}$	$\frac{n_{p+}}$
	n_{+1}		n_{+q}	n
Totale	1	\dots	1	1

Ciò premesso, si consideri la matrice ⁽³⁾

$$\mathbf{X}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{+1}} & \dots & \frac{n_{p1}}{n_{+1}} \\ \frac{n_{1q}}{n_{+q}} & \dots & \frac{n_{pq}}{n_{+q}} \end{bmatrix}.$$

(3) Si ponga attenzione al fatto che nella matrice che segue le frequenze relative di A condizionate alle modalità di B compaiono nelle righe.

Posto ($i = 1, \dots, p$)

$$\mathbf{x}_{(2)i} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{+1}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{+q}} \end{bmatrix}$$

e ($j = 1, \dots, q$)

$$\mathbf{x}_{(2)j} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{1j}}{\mathbf{n}_{+j}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{pj}}{\mathbf{n}_{+j}} \end{bmatrix},$$

possiamo scrivere

$$\mathbf{X}_{(2)} = [\mathbf{x}_{(2)1} \cdots \mathbf{x}_{(2)p}] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{(2)1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{(2)q} \end{bmatrix}.$$

I p vettori $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)p}$ sono detti genericamente *variabili* associate alla matrice $\mathbf{X}_{(2)}$; a loro volta, i q vettori $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)q}$, che caratterizzano le distribuzioni di frequenze relative di A condizionate alle modalità di B , sono denominati *profili colonna* e la matrice $\mathbf{X}_{(2)}$ è detta *matrice dei profili colonna*.

Infine, il vettore

$$\mathbf{g}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{1+}}{\mathbf{n}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{p+}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix},$$

che caratterizza la distribuzione di frequenze relative marginali di A , è detto *profilo marginale di colonna*.

2.2 LA STRUTTURA ALGEBRICA

(i) Si consideri anzitutto la matrice $\mathbf{X}_{(1)}$ di ordine (p, q) dei profili riga.

Riguardando $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)q}$ e $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$ come vettori appartenenti, rispettivamente, a $\mathbf{R}_{(1)}^p$ e $\mathbf{R}_{(1)}^q$, in $\mathbf{R}_{(1)}^p$ (spazio delle variabili associate alla matrice $\mathbf{X}_{(1)}$) e in $\mathbf{R}_{(1)}^q$ (spazio dei profili riga) si introduce una struttura di spazio euclideo nel modo seguente.

In $\mathbf{R}_{(1)}^p$ la matrice del prodotto interno – rispetto alla base naturale di $\mathbf{R}_{(1)}^p$ – è data da

$$\mathbf{M}_{(1)} = \text{diag}(m_{(1)1}, \dots, m_{(1)p}) = \text{diag}\left(\frac{n_{1+}}{n}, \dots, \frac{n_{p+}}{n}\right)$$

dove $m_{(1)i} = n_{i+}/n$ ($i = 1, \dots, p$) indica il *peso* attribuito all' i -esimo profilo riga.

Pertanto, poiché si può scrivere ($\mathbf{u}_{(1)}$: vettore colonna di ordine p con elementi tutti eguali a 1)

$$\mathbf{g}_{(1)} = \mathbf{X}_{(1)}' \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{u}_{(1)},$$

$\mathbf{g}_{(1)}$ costituisce il baricentro dei p profili riga $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$.

In $\mathbf{R}_{(1)}^q$ la matrice del prodotto interno – rispetto alla base naturale di $\mathbf{R}_{(1)}^q$ – è data da (*metrica del chi-quadrato*)

$$\mathbf{Q}_{(1)} = \text{diag}(q_{(1)1}, \dots, q_{(1)q}) = \text{diag}\left(\frac{n}{n_{+1}}, \dots, \frac{n}{n_{+q}}\right)$$

dove $q_{(1)j} = n/n_{+j}$ ($j = 1, \dots, q$) denota il reciproco del *peso* attribuito al j -esimo profilo colonna.

Tale scelta richiede qualche giustificazione.

A questo proposito, si osservi anzitutto che la distanza (al quadrato) tra due profili riga $\mathbf{x}_{(1)i}$ e $\mathbf{x}_{(1)i^*}$, non ponderata, è

$$\sum_j \left(\frac{n_{ij}}{n_{i+}} - \frac{n_{i^*j}}{n_{i^*+}} \right)^2.$$

Ora, ciascuna componente

$$\left(\frac{n_{ij}}{n_{i+}} - \frac{n_{i*j}}{n_{i*+}} \right)^2$$

di quest'ultima sommatoria risulta ovviamente influenzata dalla frequenza relativa marginale n_{+j}/n .

Appare pertanto appropriato relativizzare ogni componente con tale frequenza relativa marginale.

Ma ciò equivale a considerare quale distanza (al quadrato) tra due profili riga l'espressione

$$\sum_j \left(\frac{n_{ij}}{n_{i+}} - \frac{n_{i*j}}{n_{i*+}} \right)^2 \Big/ \frac{n_{+j}}{n} = \sum_j \left(\frac{n_{ij}}{n_{i+}} - \frac{n_{i*j}}{n_{i*+}} \right)^2 \frac{n}{n_{+j}},$$

ovvero a scegliere $\mathbf{Q}_{(1)}$ come matrice rappresentativa del prodotto interno in $\mathbf{R}_{(1)}^q$.

OSSERVAZIONE 1. La scelta di $\mathbf{Q}_{(1)}$ quale matrice rappresentativa del prodotto interno nello spazio dei profili riga – che, tra l'altro, giustifica la denominazione di *metrica del chi-quadrato* sopra menzionata – implica la cosiddetta proprietà della *equivalenza distribuzionale*.

In breve, ciò significa che, aggregando due modalità b_j, b_{j^*} di \mathbf{B} a cui corrispondono frequenze n_{ij}, n_{i*j^*} ($i = 1, \dots, p$) proporzionali, la distanza tra due generici profili riga non muta.

(ii) Si consideri adesso la matrice $\mathbf{X}_{(2)}$ di ordine (q, p) dei profili colonna.

Riguardando $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)p}$ e $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)q}$ come vettori appartenenti, rispettivamente, a $\mathbf{R}_{(2)}^q$ e $\mathbf{R}_{(2)}^p$, in $\mathbf{R}_{(2)}^q$ (*spazio delle variabili associate alla matrice $\mathbf{X}_{(2)}$*) e in $\mathbf{R}_{(2)}^p$ (*spazio dei profili colonna*) si introduce una struttura di spazio euclideo nel modo seguente.

In $\mathbf{R}_{(2)}^q$ la matrice del prodotto interno – rispetto alla base naturale di $\mathbf{R}_{(2)}^q$ – è data da

$$\mathbf{M}_{(2)} = \text{diag}(m_{(2)1}, \dots, m_{(2)q}) = \text{diag}\left(\frac{n_{+1}}{n}, \dots, \frac{n_{+q}}{n}\right)$$

dove $m_{(2)j} = n_{+j}/n$ ($j = 1, \dots, q$) denota il *peso* attribuito al j -esimo profilo

colonna.

Pertanto, poiché si può scrivere ($\mathbf{u}_{(2)}$: vettore colonna di ordine q con elementi tutti eguali a 1)

$$\mathbf{g}_{(2)} = \mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{u}_{(2)},$$

$\mathbf{g}_{(2)}$ costituisce il baricentro dei q profili colonna $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)q}$.

In $\mathbf{R}_{(2)}^p$ la matrice del prodotto interno – rispetto alla base naturale di $\mathbf{R}_{(2)}^p$ – è data da (*metrica del chi-quadrato*)

$$\mathbf{Q}_{(2)} = \text{diag}(q_{(2)1}, \dots, q_{(2)p}) = \text{diag}\left(\frac{n}{n_{1+}}, \dots, \frac{n}{n_{p+}}\right)$$

dove $q_{(2)i} = n/n_{i+}$ ($i = 1, \dots, p$) denota il reciproco del *peso* attribuito all' i -esimo profilo riga.

Ovviamente, la scelta di $\mathbf{Q}_{(2)}$ quale matrice rappresentativa del prodotto interno nello spazio dei profili colonna si giustifica con un ragionamento simile a quello svolto in precedenza a proposito di $\mathbf{Q}_{(1)}$. Vale inoltre una considerazione analoga a quella espressa nella Osservazione 1.

OSSERVAZIONE 2. Si noti che risulta

$$\mathbf{M}_{(1)} = \text{diag}(\mathbf{g}_{(2)}) \quad , \quad \mathbf{Q}_{(1)} = \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \quad , \quad \mathbf{M}_{(2)} = \text{diag}(\mathbf{g}_{(1)}) \quad , \quad \mathbf{Q}_{(2)} = \mathbf{M}_{(1)}^{-1}$$

e che, posto

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{11} & \cdots & \mathbf{n}_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{n}_{p1} & \cdots & \mathbf{n}_{pq} \end{bmatrix},$$

si ha

$$\mathbf{X}_{(1)} = \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \frac{1}{n} \mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{X}_{(2)} = \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \frac{1}{n} \mathbf{X}' .$$

OSSERVAZIONE 3. Si ponga attenzione al fatto che $\mathbf{R}_{(1)}^p$ e $\mathbf{R}_{(2)}^p$, pur essendo spazi vettoriali dello stesso ordine, sono dotati di una diversa metrica, e ciò spiega la ragione per cui si è ritenuto di indicarli con un diverso indice.

Una annotazione analoga vale ovviamente per quanto riguarda $R_{(1)}^q$ e $R_{(2)}^q$.

2.3 CONSIDERAZIONI ULTERIORI

(i) Si considerino i p profili riga $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$ e il profilo marginale di riga $\mathbf{g}_{(1)}$.

Vogliamo mostrare che tali profili appartengono a una opportuna varietà lineare di $R_{(1)}^q$.

In effetti, i profili $\mathbf{x}_{(1)i}$ ($i = 1, \dots, p$) e $\mathbf{g}_{(1)}$ soddisfano le condizioni

$$\frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}} + \frac{\mathbf{n}_{i2}}{\mathbf{n}_{i+}} + \dots + \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} = 1, \quad \frac{\mathbf{n}_{+1}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{n}_{+2}}{\mathbf{n}} + \dots + \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}} = 1$$

da cui

$$\frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}} = 1 - \frac{\mathbf{n}_{i2}}{\mathbf{n}_{i+}} - \dots - \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}}, \quad \frac{\mathbf{n}_{+1}}{\mathbf{n}} = 1 - \frac{\mathbf{n}_{+2}}{\mathbf{n}} - \dots - \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}}.$$

Pertanto,

$$\mathbf{x}_{(1)i} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \frac{\mathbf{n}_{i2}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\mathbf{n}_{i2}}{\mathbf{n}_{i+}} - \dots - \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \frac{\mathbf{n}_{i2}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{i2}}{\mathbf{n}_{i+}} + \dots + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}}$$

e

$$\mathbf{g}_{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{+1}}{\mathbf{n}} \\ \frac{\mathbf{n}_{+2}}{\mathbf{n}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\mathbf{n}_{+2}}{\mathbf{n}} - \dots - \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}} \\ \frac{\mathbf{n}_{+2}}{\mathbf{n}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{+2}}{\mathbf{n}} + \dots + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}}.$$

Questo vuol dire che ciascun profilo appartiene alla varietà lineare (iperpiano di dimensione $q - 1$) ottenuta mediante la traslazione

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{(1)}^q$, generato dai $q - 1$ vettori linearmente indipendenti

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Inoltre, come si verifica subito, il vettore $\mathbf{g}_{(1)}$, tale che $\mathbf{g}_{(1)}' \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = 1$, è ortogonale a quest'ultimo sottospazio vettoriale.

Ovviamente, annotazioni del tutto analoghe valgono per i q profili colonna $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)q}$ e il profilo marginale di colonna $\mathbf{g}_{(2)}$.

(ii) Si considerino nuovamente i p profili riga $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$ e il profilo marginale di riga $\mathbf{g}_{(1)}$.

Qui sopra abbiamo posto in evidenza che tali profili appartengono a una opportuna varietà lineare (iperpiano di dimensione $q - 1$).

L'argomento può essere utilmente approfondito introducendo il concetto di *simplexso* e quelle a esso collegato di *coordinate baricentriche*.

Siano $\mathbf{v}_{(1)1}, \dots, \mathbf{v}_{(1)q}$ un insieme di q vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\mathbb{R}_{(1)}^q$.

Si chiama *simplexso di vertici* $\mathbf{v}_{(1)1}, \dots, \mathbf{v}_{(1)q}$ l'insieme

$$\{\mathbf{x}_{(1)} \mid \mathbf{x}_{(1)} = c_{(1)1} \mathbf{v}_{(1)1} + \dots + c_{(1)q} \mathbf{v}_{(1)q}, c_{(1)j} \geq 0 (j = 1, \dots, q), \sum_j c_{(1)j} = 1\}.$$

I coefficienti $c_{(1)1}, \dots, c_{(1)q}$, tali che $c_{(1)j} \geq 0 (j = 1, \dots, q)$ e $\sum_j c_{(1)j} = 1$, sono detti le *coordinate baricentriche* di $\mathbf{x}_{(1)}$ rispetto a $\mathbf{v}_{(1)1}, \dots, \mathbf{v}_{(1)q}$.

Identificando $\mathbf{v}_{(1)1}, \dots, \mathbf{v}_{(1)q}$ con i vettori $\mathbf{u}_{(1)1}, \dots, \mathbf{u}_{(1)q}$ che formano la base

naturale di $\mathbf{R}_{(1)}^q$, è immediato riconoscere che sia i profili riga sia il profilo marginale di riga appartengono al simpleso di vertici $\mathbf{u}_{(1)1}, \dots, \mathbf{u}_{(1)q}$, poiché risulta

$$\mathbf{x}_{(1)i} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \frac{\mathbf{n}_{i2}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}} \mathbf{u}_{(1)1} + \dots + \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \mathbf{u}_{(1)q}$$

con $\frac{\mathbf{n}_{ij}}{\mathbf{n}_{i+}} \geq 0$ ($j = 1, \dots, q$), $\sum_j \frac{\mathbf{n}_{ij}}{\mathbf{n}_{i+}} = 1$, e

$$\mathbf{g}_{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{+1}}{\mathbf{n}} \\ \frac{\mathbf{n}_{+2}}{\mathbf{n}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{n}_{+1}}{\mathbf{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

con $\frac{\mathbf{n}_{+j}}{\mathbf{n}} > 0$ ($j = 1, \dots, q$), $\sum_j \frac{\mathbf{n}_{+j}}{\mathbf{n}} = 1$.

Ovviamente,

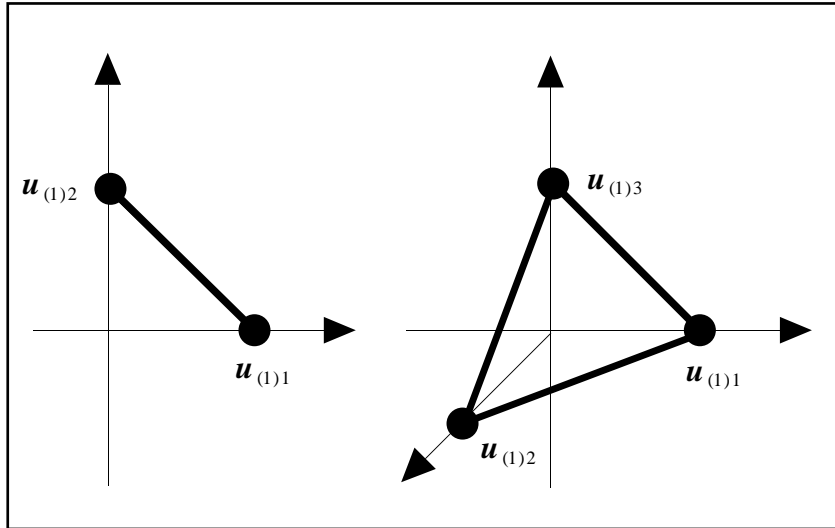
$$\frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}}, \dots, \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \text{ e } \frac{\mathbf{n}_{+1}}{\mathbf{n}}, \dots, \frac{\mathbf{n}_{+q}}{\mathbf{n}}$$

sono le coordinate baricentriche di $\mathbf{x}_{(1)i}$ e $\mathbf{g}_{(1)}$ rispetto a $\mathbf{u}_{(1)1}, \dots, \mathbf{u}_{(1)q}$.

Si noti esplicitamente che (Fig. 1)

- per $q = 2$, il simpleso di vertici $\mathbf{u}_{(1)1}, \mathbf{u}_{(1)2}$ è un segmento, sottoinsieme di una retta (varietà lineare di dimensione 1);
- per $q = 3$, il simpleso di vertici $\mathbf{u}_{(1)1}, \mathbf{u}_{(1)2}, \mathbf{u}_{(1)3}$ è un triangolo, sottoinsieme di un piano (varietà lineare di dimensione 2).

Fig. 1



Chiaramente, annotazioni del tutto analoghe a quelle qui esposte valgono per i q profili colonna $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)q}$ e il profilo marginale di colonna $\mathbf{g}_{(2)}$.

* * *

Prima di concludere questa Sezione 2, dedicata all'esposizione di alcuni concetti preliminari riguardanti i dati di base e la loro struttura algebrica, vogliamo svolgere una considerazione concernente la natura dei caratteri presenti nella distribuzione doppia esaminata, che abbiamo supposto entrambi qualitativi sconnessi. Com'è facilmente intuibile, i concetti qui espressi rimangono invariati qualora si supponga che i caratteri della distribuzione siano entrambi quantitativi o misti, o che, pur essendo qualitativi, siano ordinabili. In tali casi, tuttavia, considerando tali caratteri come fossero qualitativi sconnessi, si incorre in una perdita di informazione. Nel seguito di questa esposizione, anche se sono state sviluppate tecniche di analisi tendenti a recuperare tale informazione, ci limiteremo a studiare il caso di caratteri qualitativi sconnessi.

3 LA ACP DELLE MATRICI DEI PROFILI RIGA E COLONNA

Come si è accennato nella Premessa, la ASC ha come obiettivo lo studio della struttura di una distribuzione doppia di frequenze.

Si è anche detto che della ASC esistono varie versioni. Una di queste, alla cui esposizione è dedicato il presente lavoro, consiste nello studio delle configurazioni assunte dai profili riga e colonna – che caratterizzano, rispettivamente, le distribuzioni di frequenze relative di B condizionate alle modalità di A e le distribuzioni di frequenze relative di A condizionate alle modalità di B – mediante l'applicazione della analisi delle componenti principali (ACP) ⁽⁴⁾ sia alla matrice dei profili riga (Sezione 4) sia alla matrice dei profili colonna (Sezione 5) ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾.

OSSERVAZIONE 4. Si osservi che le matrici dei profili riga e colonna sono ciascuna del tipo «individui×variabili», come accade per la matrice dei dati di una ordinaria ACP.

Tuttavia, mentre gli individui, rappresentati nelle righe delle matrici dei profili, hanno un significato sostanziale, le variabili, rappresentate nei vettori colonna delle suddette matrici, assumono in questo contesto un significato puramente formale.

(4) Le nozioni essenziali riguardanti la ACP a cui faremo riferimento sono contenute in [15].

(5) L'esposizione contenuta nella Sezione 5, che segue lo stesso schema di quella contenuta nella Sezione 4, è svolta sia per ragioni di completezza sia per un eccesso di pedanteria da parte di chi scrive.

(6) Tra i risultati delle due ACP intercorrono molteplici relazioni che saranno poste in evidenza in un secondo momento (Sezione 6).

4 LA ACP DELLA MATRICE DEI PROFILI RIGA

4.1 I PRINCIPALI RISULTATI ALGEBRICI

Si consideri la matrice $\mathbf{X}_{(1)}$ di ordine (p, q) dei profili riga.

A questa è possibile associare la matrice dei profili riga, centrata rispetto al baricentro $\mathbf{g}_{(1)}$, data da

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{u}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{1+}} & \dots & \frac{n_{1q}}{n_{1+}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{n_{p1}}{n_{p+}} & \dots & \frac{n_{pq}}{n_{p+}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_{+1}}{n} & \dots & \frac{n_{+q}}{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{1+}} - \frac{n_{+1}}{n} & \dots & \frac{n_{1q}}{n_{1+}} - \frac{n_{+q}}{n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{n_{p1}}{n_{p+}} - \frac{n_{+1}}{n} & \dots & \frac{n_{pq}}{n_{p+}} - \frac{n_{+q}}{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la quale – posto $(j = 1, \dots, q; i = 1, \dots, p)$

$$\mathbf{y}_{(1)j} = \begin{bmatrix} \frac{n_{1j}}{n_{1+}} - \frac{n_{+j}}{n} \\ \vdots \\ \frac{n_{pj}}{n_{p+}} - \frac{n_{+j}}{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{(1)i} = \begin{bmatrix} \frac{n_{i1}}{n_{i+}} - \frac{n_{+1}}{n} \\ \vdots \\ \frac{n_{iq}}{n_{i+}} - \frac{n_{+q}}{n} \end{bmatrix}$$

– può essere scritta nella forma

$$\mathbf{Y}_{(1)} = [\mathbf{y}_{(1)1} \cdots \mathbf{y}_{(1)q}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}'_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_{(1)p} \end{bmatrix}.$$

Considerata l'equazione fondamentale della ACP

$$(1) \quad \mathbf{V}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{c}_{(1)} = \lambda_{(1)} \mathbf{c}_{(1)}$$

dove

$$\mathbf{V}_{(1)} = \mathbf{Y}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{g}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)}$$

rappresenta la matrice di inerzia (di ordine (q, q)) rispetto al baricentro $\mathbf{g}_{(1)}$ dei p profili riga $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$, dalla (1) si ottengono

- q autovalori (reali) $\tilde{\lambda}_{(1)1}, \dots, \tilde{\lambda}_{(1)q}$ tali che

$$\tilde{\lambda}_{(1)1} \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{(1)q} \geq 0;$$

- q vettori principali $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{(1)q}$ – associati, rispettivamente, agli autovalori $\tilde{\lambda}_{(1)1}, \dots, \tilde{\lambda}_{(1)q}$ – tali che, posto

$$\tilde{\mathbf{C}}_{(1)} = [\tilde{\mathbf{c}}_{(1)1} \cdots \tilde{\mathbf{c}}_{(1)q}],$$

si abbia

$$\tilde{\mathbf{C}}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{C}}_{(1)} = \mathbf{I}_q;$$

- q componenti principali $\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1} = \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{(1)q} = \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)q}$ tali che, posto

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{(1)} = [\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1} \cdots \tilde{\mathbf{y}}_{(1)q}] \quad , \quad \tilde{\mathbf{D}}_{(1)} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_{(1)1}, \dots, \tilde{\lambda}_{(1)q}),$$

si abbia

$$\tilde{\mathbf{Y}}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \tilde{\mathbf{Y}}_{(1)} = \tilde{\mathbf{D}}_{(1)}.$$

Si noti che $r_{(1)} = r(\mathbf{Y}_{(1)}) = r(\mathbf{V}_{(1)}) = r(\mathbf{V}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)}) = r(\tilde{\mathbf{Y}}_{(1)}) = r(\tilde{\mathbf{D}}_{(1)})$ ed è $r_{(1)} = 0$ se e soltanto se $\mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{O}$, vale a dire, come è facile verificare, se e soltanto se tra i caratteri A e B sussiste indipendenza statistica.

D'altra parte, è $r_{(1)} < q$ perché, postmoltiplicando ambo i membri di $\mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{u}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)}$ per il vettore non nullo $\mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)}$, si ottiene $(\mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = \mathbf{u}_{(1)}; \mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = 1)$

$$\mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} - \mathbf{u}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = \mathbf{u}_{(1)} - \mathbf{u}_{(1)} = \mathbf{0}$$

e, quindi, non può risultare $r_{(1)} = q$.

Escluso il caso banale in cui sia $\mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{0}$, da quanto detto, si deduce che, in generale, la (1) ammette $r_{(1)}$ ($0 < r_{(1)} \leq q-1$) autovalori positivi $\tilde{\lambda}_{(1)1}, \dots, \tilde{\lambda}_{(1)r_{(1)}}$ a cui sono associati i vettori principali $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{(1)r_{(1)}}$ e $q-r_{(1)}$ autovalori nulli $\tilde{\lambda}_{(1)r_{(1)+1}} = \dots = \tilde{\lambda}_{(1)q}$ a cui sono associati i vettori principali $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)r_{(1)+1}}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{(1)q}$.

Tuttavia, poiché risulta $\mathbf{V}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_{(1)}$ è un autovettore corrispondente a un autovalore nullo.

Infine, per quanto riguarda le componenti principali, si ha ($j = 1, \dots, r_{(1)}$)

$$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)j} = \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} \neq \mathbf{0}$$

e ($j = r_{(1)} + 1, \dots, q$)

$$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)j} = \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \mathbf{0}.$$

La situazione che abbiamo descritto è riassunta nel quadro seguente, dove si è identificato $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)r_{(1)+1}}$ con $\mathbf{g}_{(1)}$.

Analisi condotta sulla base della matrice centrata $\mathbf{Y}_{(1)}$ (equazione (1))			
Autovalori	Vettori principali	Componenti principali	
$\tilde{\lambda}_{(1)1}$	$\tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1}$	$= \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}$
\vdots	\vdots	\vdots	
$\tilde{\lambda}_{(1)r_{(1)}}$	$\tilde{\mathbf{c}}_{(1)r_{(1)}}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)r_{(1)}}$	$= \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)r_{(1)}}$
$\tilde{\lambda}_{(1)r_{(1)+1}} = 0$	$\mathbf{g}_{(1)}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)r_{(1)+1}} = \mathbf{0}$	
\vdots	\vdots	\vdots	
$\tilde{\lambda}_{(1)q} = 0$	$\tilde{\mathbf{c}}_{(1)q}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)q} = \mathbf{0}$	

Si osservi adesso che si ha

- per $j = 1, \dots, r_{(1)}$ ($\mathbf{g}_{(1)}' \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = 0$)

$$\begin{aligned} & \{ \mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} - \mathbf{g}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \tilde{\lambda}_{(1)j} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} \} \\ & \Leftrightarrow \{ \mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \tilde{\lambda}_{(1)j} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} \}; \end{aligned}$$

- per $j = r_{(1)} + 1$ ($\tilde{\mathbf{c}}_{(1)r_{(1)}+1} = \mathbf{g}_{(1)}$; $\mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = 1$)

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} - \mathbf{g}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = \mathbf{0}\} \\ & \Leftrightarrow \{\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = \mathbf{g}_{(1)}\}; \end{aligned}$$

- per $j = r_{(1)} + 2, \dots, q$ ($\mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = 0$)

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} - \mathbf{g}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \mathbf{0}\} \\ & \Leftrightarrow \{\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Ciò significa che l'equazione

$$(1') \quad \mathbf{S}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{c}_{*(1)} = \lambda_{*(1)} \mathbf{c}_{*(1)},$$

dove

$$\mathbf{S}_{(1)} = \mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)}$$

rappresenta la matrice di inerzia (di ordine (q, q)) rispetto all'origine dei p profili riga $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$, ammette gli stessi autovalori e autovettori della equazione (1), tranne che – in luogo dell'autovalore $\tilde{\lambda}_{(1)r_{(1)}+1} = 0$ a cui abbiamo associato il vettore principale $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)r_{(1)}+1} = \mathbf{g}_{(1)}$ – si ha l'autovalore $\tilde{\lambda}_{*(1)r_{(1)}+1} = 1$ a cui è associato il medesimo vettore principale $\mathbf{g}_{(1)}$.

Ovviamente, per quanto riguarda le componenti principali risulta

- per $j = 1, \dots, r_{(1)}$

$$\mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = (\mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{u}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)}) \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \tilde{\mathbf{y}}_{(1)j} \neq \mathbf{0};$$

- per $j = r_{(1)} + 1$

$$\mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = \mathbf{u}_{(1)} \neq \tilde{\mathbf{y}}_{(1)j} = \mathbf{0};$$

- per $j = r_{(1)} + 2, \dots, q$

$$\mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = (\mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{u}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)}) \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j} = \tilde{\mathbf{y}}_{(1)j} = \mathbf{0}.$$

La situazione che abbiamo ora descritto è riassunta nel quadro seguente.

Analisi condotta sulla base della matrice non centrata $\mathbf{X}_{(1)}$ (equazione (1'))

Autovalori	Vettori principali		$\mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)j}$
$\tilde{\lambda}_{*(1)1}$	$= \tilde{\lambda}_{(1)1}$	$\tilde{\mathbf{c}}_{*(1)1} = \tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1} \neq \mathbf{0}$
\vdots		\vdots	\vdots
$\tilde{\lambda}_{*(1)r(1)}$	$= \tilde{\lambda}_{(1)r(1)}$	$\tilde{\mathbf{c}}_{*(1)r(1)} = \tilde{\mathbf{c}}_{(1)r(1)}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)r(1)} \neq \mathbf{0}$
$\tilde{\lambda}_{*(1)r(1)+1}$	$= 1$	$\tilde{\mathbf{c}}_{*(1)r(1)+1} = \mathbf{g}_{(1)}$	$\mathbf{u}_{(1)}$
\vdots		\vdots	\vdots
$\tilde{\lambda}_{*(1)q}$	$= 0$	$\tilde{\mathbf{c}}_{*(1)q} = \tilde{\mathbf{c}}_{(1)q}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(1)q} = \mathbf{0}$

Due ulteriori punti che occorre menzionare sono i seguenti.

Il primo riguarda il significato da attribuire all'inerzia rispetto al baricentro $\mathbf{g}_{(1)}$ dei p profili riga $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$, vale a dire alla quantità

$$I_{\mathbf{g}_{(1)}} = \text{tr}(\mathbf{V}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)}) = \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}_{(1)}) = \tilde{\lambda}_{(1)1} + \dots + \tilde{\lambda}_{(1)r(1)}.$$

Ora, un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{V}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)}) &= \text{tr}((\mathbf{Y}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{Y}_{(1)}) \mathbf{Q}_{(1)}) \\ &= \text{tr}((\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{g}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)}) \mathbf{Q}_{(1)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)}) - \text{tr}(\mathbf{g}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)}) - \text{tr}(\mathbf{g}'_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)}) - 1 \\ &= \sum_i \sum_j \frac{n_{ij}^2}{n_{i+} n_{+j}} - 1 = \varphi^2. \end{aligned}$$

Pertanto, l'inerzia rispetto al baricentro dei p profili riga $\mathbf{x}_{(1)1}, \dots, \mathbf{x}_{(1)p}$ non è altro che il noto indice di contingenza media quadratica (Pearson).

Il secondo punto riguarda la cosiddetta *ricostruzione* delle matrici $\mathbf{Y}_{(1)}$ e $\mathbf{X}_{(1)}$ (*scomposizione in valori singolari*).

Nel caso di $\mathbf{Y}_{(1)}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{(1)} &= \tilde{\mathbf{y}}_{(1)1} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)1} + \dots + \tilde{\mathbf{y}}_{(1)r(1)} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)r(1)} \\ &= [\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1} \dots \tilde{\mathbf{y}}_{(1)r(1)} \mathbf{0} \dots \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)r(1)} \\ \mathbf{g}'_{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)q} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Y}}_{(1)} \tilde{\mathbf{C}}'_{(1)}. \end{aligned}$$

Nel caso di $\mathbf{X}_{(1)}$, risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(1)} &= \tilde{\mathbf{y}}_{(1)1} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)1} + \dots + \tilde{\mathbf{y}}_{(1)r(1)} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)r(1)} + \mathbf{u}_{(1)} \mathbf{g}'_{(1)} \\ &= [\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1} \dots \tilde{\mathbf{y}}_{(1)r(1)} \mathbf{u}_{(1)} \dots \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)r(1)} \\ \mathbf{g}'_{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)q} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Y}}_{*(1)} \tilde{\mathbf{C}}'_{(1)}. \end{aligned}$$

4.2 LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI PROFILI RIGA

Considerati i p profili riga (misurati in termini di deviazioni dal baricentro) $\mathbf{y}_{(1)1} = \mathbf{x}_{(1)1} - \mathbf{g}_{(1)}$, \dots , $\mathbf{y}_{(1)p} = \mathbf{x}_{(1)p} - \mathbf{g}_{(1)}$, la loro rappresentazione grafica usuale si ottiene, come in una ordinaria ACP, proiettando ortogonalmente tali profili riga nel sottospazio generato dal vettore $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}$ (asse principale) o nel sottospazio generato dai vettori $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}, \tilde{\mathbf{c}}_{(1)2}$ (piano principale).

Ora, la coordinata della proiezione ortogonale $\hat{\mathbf{y}}_{(1)i}$ di $\mathbf{y}_{(1)i}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$ ($h = 1, 2$), rispetto a $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$, è data da $(\mathbf{u}_{(1)i})_h$: vettore colonna di ordine p a elementi tutti nulli tranne l'elemento i -esimo posto eguale a 1)

$$\tilde{\mathbf{c}}'_{(1)h} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{y}_{(1)i} = \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)h} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{Y}'_{(1)} \mathbf{u}_{(1)i} = \tilde{\mathbf{y}}'_{(1)h} \mathbf{u}_{(1)i} = \tilde{y}_{(1)h,i}$$

dove $\tilde{y}_{(1)h,i}$ denota l'elemento i -esimo della componente principale (vettore

colonna di ordine p) $\tilde{\mathbf{y}}_{(1)h}$.

Pertanto, le coordinate della proiezione ortogonale $\hat{\mathbf{y}}_{(1)i}$ di $\mathbf{y}_{(1)i}$ nel piano principale, per esempio, sono $(\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1,i}, \tilde{\mathbf{y}}_{(1)2,i})$.

I criteri in base ai quali si giudica della bontà di tale rappresentazione sono analoghi a quelli di una ordinaria ACP.

Sempre con riferimento al piano principale, la qualità globale della rappresentazione di $\mathbf{y}_{(1)1}, \dots, \mathbf{y}_{(1)p}$ si può misurare mediante l'indice

$$\text{GQRII} = \frac{\tilde{\lambda}_{(1)1} + \tilde{\lambda}_{(1)2}}{\tilde{\lambda}_{(1)1} + \dots + \tilde{\lambda}_{(1)q}}.$$

A sua volta, la qualità della rappresentazione di $\mathbf{y}_{(1)i}$ si può misurare attraverso l'indice

$$\text{QR}(i; \tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}, \tilde{\mathbf{c}}_{(1)2}) = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1,i}^2 + \tilde{\mathbf{y}}_{(1)2,i}^2}{\tilde{\mathbf{y}}_{(1)1,i}^2 + \dots + \tilde{\mathbf{y}}_{(1)q,i}^2}.$$

Infine, nell'interpretare i risultati dell'analisi, dato che $\mathbf{M}_{(1)}$ non è in generale una matrice scalare, risulta importante procedere all'esame degli indici

$$C(i; \tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}) = \frac{\frac{\mathbf{n}_{i+}}{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{y}}_{(1)1,i}^2}{\tilde{\lambda}_{(1)1}}, \quad C(i; \tilde{\mathbf{c}}_{(1)2}) = \frac{\frac{\mathbf{n}_{i+}}{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{y}}_{(1)2,i}^2}{\tilde{\lambda}_{(1)2}}$$

che consentono di individuare tra $\mathbf{y}_{(1)1}, \dots, \mathbf{y}_{(1)p}$ quel profilo riga il cui contributo all'inerzia spiegata dal sottospazio in considerazione è comparativamente maggiore.

Si osservi anche che la proiezione ortogonale $\hat{\mathbf{y}}_{(1)i}$ di $\mathbf{y}_{(1)i}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$ ($h = 1, 2$) è eguale alla proiezione ortogonale $\hat{\mathbf{x}}_{(1)i}$ di $\mathbf{x}_{(1)i}$ nel medesimo sottospazio.

In effetti, tenuto conto del fatto che $\tilde{\mathbf{c}}'_{(1)h} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{g}_{(1)} = 0$, risulta

$$\hat{\mathbf{y}}_{(1)i} = \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)h} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{y}_{(1)i} = \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)h} \mathbf{Q}_{(1)} (\mathbf{x}_{(1)i} - \mathbf{g}_{(1)}) = \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} \tilde{\mathbf{c}}'_{(1)h} \mathbf{Q}_{(1)} \mathbf{x}_{(1)i} = \hat{\mathbf{x}}_{(1)i}$$

e questo significa che è indifferente considerare $\hat{\mathbf{y}}_{(1)i}$ oppure $\hat{\mathbf{x}}_{(1)i}$.

5 LA ACP DELLA MATRICE DEI PROFILI COLONNA

5.1 I PRINCIPALI RISULTATI ALGEBRICI

Si consideri la matrice $\mathbf{X}_{(2)}$ di ordine (q, p) dei profili colonna.

A questa è possibile associare la matrice dei profili colonna, centrata rispetto al baricentro $\mathbf{g}_{(2)}$, data da

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{X}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)} &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{11}}{\mathbf{n}_{+1}} & \dots & \frac{\mathbf{n}_{p1}}{\mathbf{n}_{+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mathbf{n}_{1q}}{\mathbf{n}_{+q}} & \dots & \frac{\mathbf{n}_{pq}}{\mathbf{n}_{+q}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{1+}}{\mathbf{n}} & \dots & \frac{\mathbf{n}_{p+}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{11}}{\mathbf{n}_{+1}} - \frac{\mathbf{n}_{1+}}{\mathbf{n}} & \dots & \frac{\mathbf{n}_{p1}}{\mathbf{n}_{+1}} - \frac{\mathbf{n}_{p+}}{\mathbf{n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mathbf{n}_{1q}}{\mathbf{n}_{+q}} - \frac{\mathbf{n}_{1+}}{\mathbf{n}} & \dots & \frac{\mathbf{n}_{pq}}{\mathbf{n}_{+q}} - \frac{\mathbf{n}_{p+}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la quale – posto $(j = 1, \dots, q; i = 1, \dots, p)$

$$\mathbf{y}_{(2)i} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{+1}} - \frac{\mathbf{n}_{i+}}{\mathbf{n}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{+q}} - \frac{\mathbf{n}_{i+}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{(2)j} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{1j}}{\mathbf{n}_{+j}} - \frac{\mathbf{n}_{1+}}{\mathbf{n}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{n}_{pj}}{\mathbf{n}_{+j}} - \frac{\mathbf{n}_{p+}}{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$$

– può essere scritta nella forma

$$\mathbf{Y}_{(1)} = [\mathbf{y}_{(1)1} \cdots \mathbf{y}_{(1)q}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}'_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_{(1)p} \end{bmatrix}.$$

Considerata l'equazione

$$(2) \quad \mathbf{V}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{c}_{(2)} = \lambda_{(2)} \mathbf{c}_{(2)}$$

dove

$$\mathbf{V}_{(2)} = \mathbf{Y}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} - \mathbf{g}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)}$$

rappresenta la matrice di inerzia (di ordine (p, p)) rispetto al baricentro $\mathbf{g}_{(2)}$, dei p profili colonna $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)p}$, dalla (2) si ottengono

- p autovalori (reali) $\tilde{\lambda}_{(2)1}, \dots, \tilde{\lambda}_{(2)p}$ tali che

$$\tilde{\lambda}_{(2)1} \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{(2)p} \geq 0;$$

- p vettori principali $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{(2)p}$ – associati, rispettivamente, agli autovalori $\tilde{\lambda}_{(2)1}, \dots, \tilde{\lambda}_{(2)p}$ – tali che, posto

$$\tilde{\mathbf{C}}_{(2)} = [\tilde{\mathbf{c}}_{(2)1} \cdots \tilde{\mathbf{c}}_{(2)p}],$$

si abbia

$$\tilde{\mathbf{C}}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{C}}_{(2)} = \mathbf{I}_p;$$

- p componenti principali $\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1} = \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{(2)p} = \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)p}$ tali che, posto

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{(2)} = [\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1} \cdots \tilde{\mathbf{y}}_{(2)p}] \quad , \quad \tilde{\mathbf{D}}_{(2)} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_{(2)1}, \dots, \tilde{\lambda}_{(2)p}),$$

si abbia

$$\tilde{\mathbf{Y}}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{(2)} = \tilde{\mathbf{D}}_{(2)}.$$

Si noti che $r_{(2)} = r(\mathbf{Y}_{(2)}) = r(\mathbf{V}_{(2)}) = r(\mathbf{V}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)}) = r(\tilde{\mathbf{Y}}_{(2)}) = r(\tilde{\mathbf{D}}_{(2)})$ ed è $r_{(2)} = 0$ se e solo se $\mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{O}$, vale a dire, come è facile verificare, se e solo se tra i caratteri A e B sussiste indipendenza statistica.

D'altra parte, è $r_{(2)} < p$ perché, postmoltiplicando ambo i membri di $\mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{X}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)}$ per il vettore non nullo $\mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)}$, si ottiene $(\mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = \mathbf{u}_{(2)}; \mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = 1)$

$$\mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = \mathbf{u}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)} = \mathbf{0}$$

e, quindi, non può essere $r_{(2)} = p$.

Escluso il caso banale in cui sia $\mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{O}$, da quanto detto, si deduce che, in generale, la (2) ammette $r_{(2)}$ ($0 < r_{(2)} \leq p-1$) autovalori positivi $\tilde{\lambda}_{(2)1}, \dots, \tilde{\lambda}_{(2)r_{(2)}}$ a cui sono associati i vettori principali $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{(2)r_{(2)}}$ e $p-r_{(2)}$ autovalori nulli $\tilde{\lambda}_{(2)r_{(2)+1}} = \dots = \tilde{\lambda}_{(2)p}$ a cui sono associati i vettori principali $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)r_{(2)+1}}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{(2)p}$.

Tuttavia, poiché risulta $\mathbf{V}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_{(2)}$ è un autovettore corrispondente a un autovalore nullo.

Infine, per quanto riguarda le componenti principali, si ha ($i = 1, \dots, r_{(2)}$)

$$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)i} = \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} \neq \mathbf{0}$$

e ($i = r_{(2)} + 1, \dots, p$)

$$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)i} = \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \mathbf{0}.$$

La situazione che abbiamo descritto è riassunta nel quadro seguente, dove si è identificato $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)r_{(2)+1}}$ con $\mathbf{g}_{(2)}$.

Analisi condotta sulla base della matrice centrata $\mathbf{Y}_{(2)}$ (equazione (2))			
Autovalori	Vettori principali	Componenti principali	
$\tilde{\lambda}_{(2)1}$	$\tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1}$	$= \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}$
\vdots	\vdots	\vdots	
$\tilde{\lambda}_{(2)r_{(2)}}$	$\tilde{\mathbf{c}}_{(2)r_{(2)}}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)r_{(2)}}$	$= \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)r_{(2)}}$
$\tilde{\lambda}_{(2)r_{(2)+1}} = 0$	$\mathbf{g}_{(2)}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)r_{(2)+1}}$	$= \mathbf{0}$
\vdots	\vdots	\vdots	
$\tilde{\lambda}_{(2)p} = 0$	$\tilde{\mathbf{c}}_{(2)p}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)p}$	$= \mathbf{0}$

Si osservi adesso che si ha

- per $i = 1, \dots, r_{(2)}$ ($\mathbf{g}_{(2)}' \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = 0$)

$$\begin{aligned} & \{ \mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} - \mathbf{g}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \tilde{\lambda}_{(2)i} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} \} \\ & \Leftrightarrow \{ \mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \tilde{\lambda}_{(2)i} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} \}; \end{aligned}$$

- per $i = r_{(2)} + 1$ ($\tilde{\mathbf{c}}_{(2)r_{(2)}+1} = \mathbf{g}_{(2)}$; $\mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = 1$)

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} - \mathbf{g}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = \mathbf{0}\} \\ & \Leftrightarrow \{\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = \mathbf{g}_{(2)}\}; \end{aligned}$$

- per $i = r_{(2)} + 2, \dots, p$ ($\mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = 0$)

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} - \mathbf{g}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \mathbf{0}\} \\ & \Leftrightarrow \{\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Ciò significa che l'equazione

$$(2') \quad \mathbf{S}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{c}_{*(2)} = \lambda_{*(2)} \mathbf{c}_{*(2)},$$

dove

$$\mathbf{S}_{(2)} = \mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)}$$

rappresenta la matrice di inerzia (di ordine (p, p)) rispetto all'origine dei q profili colonna $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)q}$, ammette gli stessi autovalori e autovettori della equazione (2), tranne che – in luogo dell'autovalore $\tilde{\lambda}_{(2)r_{(2)}+1} = 0$ a cui abbiamo associato il vettore principale $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)r_{(2)}+1} = \mathbf{g}_{(2)}$ – si ha l'autovalore $\tilde{\lambda}_{*(2)r_{(2)}+1} = 1$ a cui è associato il medesimo vettore principale $\mathbf{g}_{(2)}$.

Ovviamente, per quanto riguarda le componenti principali risulta

- per $i = 1, \dots, r_{(2)}$

$$\mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = (\mathbf{X}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)}) \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \tilde{\mathbf{y}}_{(2)i} \neq \mathbf{0};$$

- per $i = r_{(2)} + 1$

$$\mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = \mathbf{u}_{(2)} \neq \tilde{\mathbf{y}}_{(2)i} = \mathbf{0};$$

- per $i = r_{(2)} + 2, \dots, p$

$$\mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = (\mathbf{X}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)}) \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i} = \tilde{\mathbf{y}}_{(2)i} = \mathbf{0}.$$

La situazione che abbiamo ora descritto è riassunta nel quadro seguente.

Analisi condotta sulla base della matrice non centrata $\mathbf{X}_{(2)}$ (equazione (2'))

Autovalori	Vettori principali	$\mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)i}$
$\tilde{\lambda}_{*(2)1} = \tilde{\lambda}_{(2)1}$	$\tilde{\mathbf{c}}_{*(2)1} = \tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1} \neq \mathbf{0}$
\vdots	\vdots	\vdots
$\tilde{\lambda}_{*(2)r(2)} = \tilde{\lambda}_{(2)r(2)}$	$\tilde{\mathbf{c}}_{*(2)r(2)} = \tilde{\mathbf{c}}_{(2)r(2)}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)r(2)} \neq \mathbf{0}$
$\tilde{\lambda}_{*(2)r(2)+1} = 1$	$\tilde{\mathbf{c}}_{*(2)r(2)+1} = \mathbf{g}_{(2)}$	$\mathbf{u}_{(2)}$
\vdots	\vdots	\vdots
$\tilde{\lambda}_{*(2)p} = 0$	$\tilde{\mathbf{c}}_{*(2)p} = \tilde{\mathbf{c}}_{(2)p}$	$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)p} = \mathbf{0}$

Due ulteriori punti che occorre menzionare sono i seguenti.

Il primo riguarda il significato da attribuire all'inerzia rispetto al baricentro dei q profili colonna $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)q}$, vale a dire alla quantità

$$I_{\mathbf{g}_{(2)}} = \text{tr}(\mathbf{V}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)}) = \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}_{(2)}) = \tilde{\lambda}_{(2)1} + \dots + \tilde{\lambda}_{(2)r(2)}.$$

Ora, un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{V}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)}) &= \text{tr}((\mathbf{Y}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{Y}_{(2)}) \mathbf{Q}_{(2)}) \\ &= \text{tr}((\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} - \mathbf{g}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)}) \mathbf{Q}_{(2)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)}) - \text{tr}(\mathbf{g}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)}) - \text{tr}(\mathbf{g}'_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)}) - 1 \\ &= \sum_i \sum_j \frac{n_{ij}^2}{n_{i+} n_{+j}} - 1 = \phi^2. \end{aligned}$$

Pertanto, l'inerzia rispetto al baricentro dei q profili colonna $\mathbf{x}_{(2)1}, \dots, \mathbf{x}_{(2)q}$ non è altro che il noto indice di contingenza media quadratica (Pearson).

Ovviamente, $I_{\mathbf{g}_{(2)}} = \phi^2 = I_{\mathbf{g}_{(1)}}$.

Il secondo punto riguarda la cosiddetta *ricostruzione* delle matrici $\mathbf{Y}_{(2)}$ e $\mathbf{X}_{(2)}$ (*scomposizione in valori singolari*).

Nel caso di $\mathbf{Y}_{(2)}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{(2)} &= \tilde{\mathbf{y}}_{(2)1} \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)1} + \dots + \tilde{\mathbf{y}}_{(2)r(2)} \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)r(2)} \\
&= [\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1} \cdots \tilde{\mathbf{y}}_{(2)r(2)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)r(2)} \\ \mathbf{g}'_{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)p} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Y}}_{(2)} \tilde{\mathbf{C}}'_{(2)}.
\end{aligned}$$

Nel caso di $\mathbf{X}_{(2)}$, risulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{(2)} &= \tilde{\mathbf{y}}_{(2)1} \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)1} + \dots + \tilde{\mathbf{y}}_{(2)r(2)} \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)r(2)} + \mathbf{u}_{(2)} \mathbf{g}'_{(2)} \\
&= [\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1} \cdots \tilde{\mathbf{y}}_{(2)r(2)} \mathbf{u}_{(2)} \cdots \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)r(2)} \\ \mathbf{g}'_{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)p} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Y}}_{*(2)} \tilde{\mathbf{C}}'_{(2)}.
\end{aligned}$$

5.2 LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI PROFILI COLONNA

Considerati i q profili colonna (misurati in termini di deviazioni dal baricentro) $\mathbf{y}_{(2)1} = \mathbf{x}_{(2)1} - \mathbf{g}_{(2)}$, \dots , $\mathbf{y}_{(2)q} = \mathbf{x}_{(2)q} - \mathbf{g}_{(2)}$, la loro rappresentazione grafica usuale si ottiene, come in una ordinaria ACP, proiettando ortogonalmente tali profili colonna nel sottospazio generato dal vettore $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}$ (asse principale) o nel sottospazio generato dai vettori $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}, \tilde{\mathbf{c}}_{(2)2}$ (piano principale).

Ora, la coordinata della proiezione ortogonale $\hat{\mathbf{y}}_{(2)j}$ di $\mathbf{y}_{(2)j}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}$ ($h = 1, 2$) è data da $(\mathbf{u}_{(2)j})_h$: vettore colonna di ordine q a elementi tutti nulli tranne l'elemento j -esimo)

$$\tilde{\mathbf{c}}'_{(2)h} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{y}_{(2)j} = \tilde{\mathbf{c}}'_{(2)h} \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{Y}'_{(2)} \mathbf{u}_{(2)j} = \tilde{\mathbf{y}}'_{(2)h} \mathbf{u}_{(2)j} = \tilde{\mathbf{y}}_{(2)h,j}$$

dove $\tilde{\mathbf{y}}_{(2)h,j}$ denota l'elemento j -esimo della componente principale (vettore

colonna di ordine q) $\tilde{\mathbf{y}}_{(2)h}$.

Pertanto, le coordinate della proiezione ortogonale $\hat{\mathbf{y}}_{(2)j}$ di $\mathbf{y}_{(2)j}$ nel piano principale, per esempio, sono $(\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1,j}, \tilde{\mathbf{y}}_{(2)2,j})$.

I criteri in base ai quali si giudica della bontà di tale rappresentazione sono analoghi a quelli di una ordinaria ACP.

Sempre con riferimento al piano principale, la qualità globale della rappresentazione di $\mathbf{y}_{(2)1}, \dots, \mathbf{y}_{(2)q}$ si può misurare mediante l'indice

$$\text{GQRI2} = \frac{\tilde{\lambda}_{(2)1} + \tilde{\lambda}_{(2)2}}{\tilde{\lambda}_{(2)1} + \dots + \tilde{\lambda}_{(2)p}}.$$

A sua volta, la qualità della rappresentazione di $\mathbf{y}_{(2)j}$ si può misurare attraverso l'indice

$$\text{QR}(j; \tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}, \tilde{\mathbf{c}}_{(2)2}) = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1,j}^2 + \tilde{\mathbf{y}}_{(2)2,j}^2}{\tilde{\mathbf{y}}_{(2)1,j}^2 + \dots + \tilde{\mathbf{y}}_{(2)p,j}^2}.$$

Infine, nell'interpretare i risultati dell'analisi, dato che $\mathbf{M}_{(2)}$ non è in generale una matrice scalare, risulta importante esaminare gli indici

$$\mathbf{C}(j; \tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}) = \frac{\frac{n_{+j}}{n} \tilde{\mathbf{y}}_{(2)1,j}^2}{\tilde{\lambda}_{(2)1}}, \quad \mathbf{C}(j; \tilde{\mathbf{c}}_{(2)2}) = \frac{\frac{n_{+j}}{n} \tilde{\mathbf{y}}_{(2)2,j}^2}{\tilde{\lambda}_{(2)2}}$$

che consentono di individuare tra $\mathbf{y}_{(2)1}, \dots, \mathbf{y}_{(2)q}$ quel profilo colonna il cui contributo all'inerzia spiegata dal sottospazio in considerazione è comparativamente maggiore.

Si osservi anche che la proiezione ortogonale $\hat{\mathbf{y}}_{(2)j}$ di $\mathbf{y}_{(2)j}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}$ ($h = 1, 2$) è eguale alla proiezione ortogonale $\hat{\mathbf{x}}_{(2)j}$ di $\mathbf{x}_{(2)j}$ nel medesimo sottospazio.

In effetti, tenuto conto del fatto che $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}' \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{g}_{(2)} = 0$, risulta

$$\hat{\mathbf{y}}_{(2)j} = \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}' \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{y}_{(2)j} = \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}' \mathbf{Q}_{(2)} (\mathbf{x}_{(2)j} - \mathbf{g}_{(2)}) = \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}' \mathbf{Q}_{(2)} \mathbf{x}_{(2)j} = \hat{\mathbf{x}}_{(2)j}$$

e questo significa che è indifferente considerare $\hat{\mathbf{y}}_{(2)j}$ oppure $\hat{\mathbf{x}}_{(2)j}$.

6 RELAZIONI TRA I RISULTATI DELLE DUE ACP

6.1 RELAZIONI ALGEBRICHE

Nelle sezioni immediatamente precedenti abbiamo indicato i principali risultati che si ottengono da una ACP condotta sia sulla matrice dei profili riga sia sulla matrice dei profili colonna. Vogliamo adesso porre in evidenza le relazioni algebriche che intercorrono tra i risultati delle due ACP.

1. Si osservi anzitutto che, poiché

$$\mathbf{X}_{(1)} = \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \frac{1}{n} \mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{X}_{(2)} = \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \frac{1}{n} \mathbf{X}' \quad ,$$

risulta $(\mathbf{Q}_{(1)} = \mathbf{M}_{(2)}^{-1}, \mathbf{Q}_{(2)} = \mathbf{M}_{(1)}^{-1})$

$$\mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Q}_{(1)} = \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \mathbf{M}_{(1)} \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} = \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \mathbf{X} \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \quad ,$$

$$\mathbf{X}'_{(2)} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Q}_{(2)} = \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \frac{1}{n} \mathbf{X}' \mathbf{M}_{(1)}^{-1} = \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \quad .$$

Ne consegue che le equazioni (1') e (2') – e, quindi, le (1) e (2) – ammettono i medesimi autovalori $\tilde{\lambda}_{(1)1} = \tilde{\lambda}_{(2)1} = \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{(1)r(1)} = \tilde{\lambda}_{(2)r(2)} = \tilde{\lambda}_r$.

2. (*Formule di transizione*) Dalle relazioni ($h = 1, \dots, r$)

$$\mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \mathbf{X} \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} = \tilde{\lambda}_h \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} \quad , \quad \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h} = \tilde{\lambda}_h \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h} \quad ,$$

premultiplicando la prima per $\mathbf{X} \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1}$ e moltiplicando per $\frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}}$, si ottiene

$$\mathbf{X} \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \mathbf{X} \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} \right) = \tilde{\lambda}_h \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \mathbf{X} \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} \right)$$

e, quindi,

$$\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \mathbf{X} \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(2)}^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \mathbf{X}'_{(2)} \tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} \quad .$$

Con un ragionamento simile, si dimostra poi che

$$\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \mathbf{X}' \frac{1}{n} \mathbf{M}_{(1)}^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \mathbf{X}'_{(1)} \tilde{\mathbf{c}}_{(2)h} \quad .$$

3. (*Formule di transizione*) Tenuto conto che le formule di transizione di cui al punto precedente, si verifica facilmente che risulta ($h = 1, \dots, r$)

$$\tilde{\mathbf{y}}_{(2)h} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \mathbf{X}_{(2)} \tilde{\mathbf{y}}_{(1)h}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_{(1)h} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \mathbf{X}_{(1)} \tilde{\mathbf{y}}_{(2)h}.$$

4. (*Relazioni quasi baricentriche*) Si ricordi anzitutto che, rispetto a $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$, la coordinata della proiezione ortogonale di $\mathbf{y}_{(1)i}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$ è data da $\tilde{y}_{(1)h,i}$ e che, analogamente, rispetto a $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}$, la coordinata della proiezione ortogonale di $\mathbf{y}_{(2)j}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}$ è data da $\tilde{y}_{(2)h,j}$ (Sezioni 4.2 e 5.2).

Ma, tenuto conto di quanto detto al punto precedente, si ha che

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{(1)h,i} &= \tilde{\mathbf{y}}'_{(1)h} \mathbf{u}_{(1)i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \tilde{\mathbf{y}}'_{(2)h} \mathbf{X}'_{(1)} \mathbf{u}_{(1)i} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} [\tilde{y}_{(2)h,1} \cdots \tilde{y}_{(2)h,q}] \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{11}}{\mathbf{n}_{1+}} & \cdots & \frac{\mathbf{n}_{p1}}{\mathbf{n}_{p+}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\mathbf{n}_{1q}}{\mathbf{n}_{1+}} & \cdots & \frac{\mathbf{n}_{pq}}{\mathbf{n}_{p+}} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{(1)i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} [\tilde{y}_{(2)h,1} \cdots \tilde{y}_{(2)h,q}] \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}_{i1}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \frac{\mathbf{n}_{i+}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \cdots \\ \frac{\mathbf{n}_{iq}}{\mathbf{n}_{i+}} \\ \frac{\mathbf{n}_{i+}}{\mathbf{n}_{i+}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \sum_j \tilde{y}_{(2)h,j} \frac{\mathbf{n}_{ij}}{\mathbf{n}_{i+}}, \end{aligned}$$

ovvero che, a meno del fattore

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}},$$

la coordinata, rispetto a $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$, della proiezione ortogonale di $\mathbf{y}_{(1)i}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$ è il baricentro delle coordinate, rispetto a $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}$, delle proiezioni ortogonali di $\mathbf{y}_{(2)1}, \dots, \mathbf{y}_{(2)q}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}$.

Con un ragionamento del tutto simile, si dimostra poi che

$$\tilde{y}_{(2)h,j} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}} \sum_i \tilde{y}_{(1)h,i} \frac{\mathbf{n}_{ij}}{\mathbf{n}_{+j}},$$

ovvero che, a meno del fattore

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_h}},$$

la coordinata, rispetto a $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}$, della proiezione ortogonale di $\mathbf{y}_{(2)j}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)h}$ è il baricentro delle coordinate, rispetto a $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$, delle proiezioni ortogonali di $\mathbf{y}_{(1)1}, \dots, \mathbf{y}_{(1)p}$ nel sottospazio generato da $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)h}$.

OSSERVAZIONE 5. Vogliamo mostrare che $\tilde{\lambda}_h \leq 1$ e, quindi, che $1/\sqrt{\tilde{\lambda}_h} \geq 1$ (coefficiente di dilatazione).

In effetti, tenuto conto di quanto detto al punto precedente, si ha anzitutto che ($j = 1, \dots, q$)

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{\tilde{\lambda}_h} \tilde{y}_{(2)h,j} \leq \max_i \tilde{y}_{(1)h,i} \right\} &\Rightarrow \left\{ \sqrt{\tilde{\lambda}_h} \max_j \tilde{y}_{(2)h,j} \leq \max_i \tilde{y}_{(1)h,i} \right\} \\ \Rightarrow \left\{ \tilde{\lambda}_h \max_j \tilde{y}_{(2)h,j} \leq \sqrt{\tilde{\lambda}_h} \max_i \tilde{y}_{(1)h,i} \right\} \end{aligned}$$

e ($i = 1, \dots, p$)

$$\left\{ \sqrt{\tilde{\lambda}_h} \tilde{y}_{(1)h,i} \leq \max_j \tilde{y}_{(2)h,j} \right\} \Rightarrow \left\{ \sqrt{\tilde{\lambda}_h} \max_i \tilde{y}_{(1)h,i} \leq \max_j \tilde{y}_{(2)h,j} \right\}.$$

Pertanto,

$$\tilde{\lambda}_h \max_j \tilde{y}_{(2)h,j} \leq \sqrt{\tilde{\lambda}_h} \max_i \tilde{y}_{(1)h,i} \leq \max_j \tilde{y}_{(2)h,j}$$

e, quindi, $\tilde{\lambda}_h \leq 1$.

6.2 LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA SIMULTANEA USUALE

La rappresentazione grafica simultanea usuale consiste nel sovrapporre le rappresentazioni ottenute separatamente per i profili riga e colonna.

Supposto, per esempio, di aver rappresentato i profili riga mediante le loro proiezioni ortogonali (punti immagine) nel sottospazio generato dal vettore $\tilde{\mathbf{c}}_{(1)1}$ (asse principale) e i profili colonna mediante le loro proiezioni ortogonali (punti immagine) nel sottospazio generato dal vettore $\tilde{\mathbf{c}}_{(2)1}$ (asse principale), questo significa portare a coincidere i due assi principali.

Ovviamente, la prossimità tra punti immagine di uno stesso insieme, purché ben rappresentati sul relativo asse principale, è direttamente interpretabile.

Invece, una interpretazione diretta della prossimità tra punti immagine di insiemi diversi, ancorché ben rappresentati sull'asse principale che loro compete, non è possibile, in quanto si tratta di oggetti appartenenti a spazi euclidei differenti.

Tuttavia, tenuto conto delle relazioni quasi baricentriche che pongono in relazione un punto immagine di un insieme con *tutti* i punti immagine dell'altro insieme, è possibile arguire che i punti immagine di un insieme più prossimi a un determinato punto immagine dell'altro insieme sono quelli che maggiormente contribuiscono a formarne il baricentro ⁽⁷⁾.

(7) Altri tipi di rappresentazione grafica simultanea saranno esaminati in un lavoro successivo, dedicato a una esposizione della tecnica del *biplot*.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Bolasco, S., *Analisi multidimensionale dei dati*, Carocci, Roma, 1999.
- [2] Bertier, P., Bouroche, J.M., *Analyse des données multidimensionnelles*, PUF, Paris, 1977.
- [3] Bouroche, J.M., Saporta, G., *L'analisi dei dati*, CLU, Napoli, 1983.
- [4] Cailliez, F., Pages, G.P., *Introduction à l'analyse des données*, Smash, Paris, 1976.
- [5] Coppi, R., *Appunti di statistica metodologica: analisi lineare dei dati*, Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Roma, 1986.
- [6] Delvecchio, F., *Analisi statistica di dati multidimensionali*, Cacucci Editore, Bari, 1992.
- [7] Diday, E., Lemaire, J., Pouget, J., Testu, F., *Eléments d'analyse des données*, Dunod, Paris, 1982.
- [8] Escofier, B., Pagès, J., *Analyse factorielles simples et multiples*, Dunod, Paris, 1990.
- [9] Fabbris, L., *Analisi esplorativa di dati multidimensionali*, cleup editore, Padova, 1990.
- [10] Greenacre, M.J., *Theory and Applications of Correspondence Analysis*, Academic Press, London, 1984.
- [11] Greenacre, M.J., Hastie, T., *The Geometric Interpretation of Correspondence Analysis*, JASA, 1987.
- [12] Lebart, L., Morineau, A., Warwick, K.M., *Multivariate Descriptive Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [13] Leoni, R., *Indici di associazione per tabelle di contingenza doppia e tripla*, Dipartimento Statistico, Firenze, 1980.

-
- [14] Leoni, R., *Algebra lineare per le applicazioni statistiche*, Dipartimento di Statistica "G. Parenti", Firenze, 2007 (sta in <http://www.ds.unifi.it> alla voce *Materiale Didattico*).
- [15] Leoni, R., *Principal Component Analysis*, Department of Statistics, "G. Parenti", Florence, 2007.
- [16] Marchetti, G., *Analisi in componenti principali e approssimazioni di matrici*, Dipartimento Statistico, Firenze, 1984.
- [17] Rizzi, A., *Analisi dei dati*, NIS, Roma, 1985.
- [18] Saporta, G., *Probabilités, Analyse des données et Statistique*, Éditions Technip, Paris, 1990.
- [19] Volle, M., *Analyse des données*, Economica, Paris, 1981.