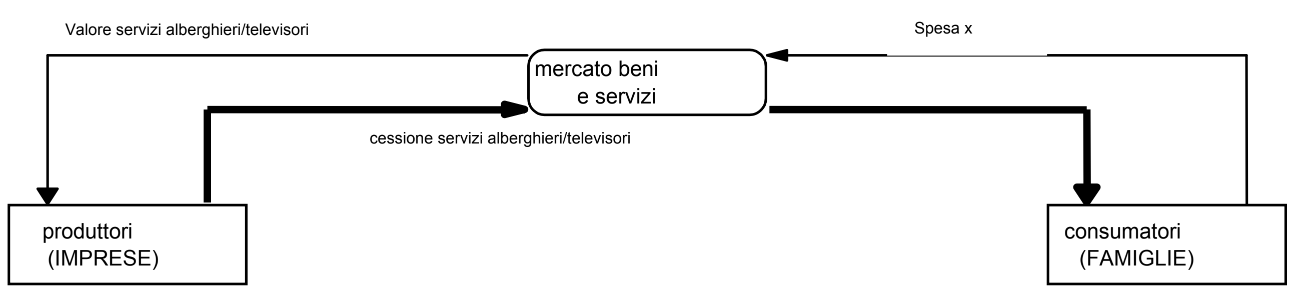
ANALISI DELLE INTERDIPENDENZE ECONOMICHE

- **Nella CN l'intero sistema produttivo viene visto come un'unica grande impresa, della quale, in sede di consuntivo, interessano i risultati economici finali, indipendentemente da quelli che si conseguono nei comparti che producono beni e servizi intermedi (il valore di questi è già incorporato nei beni finali e viene escluso dalla contabilità)**

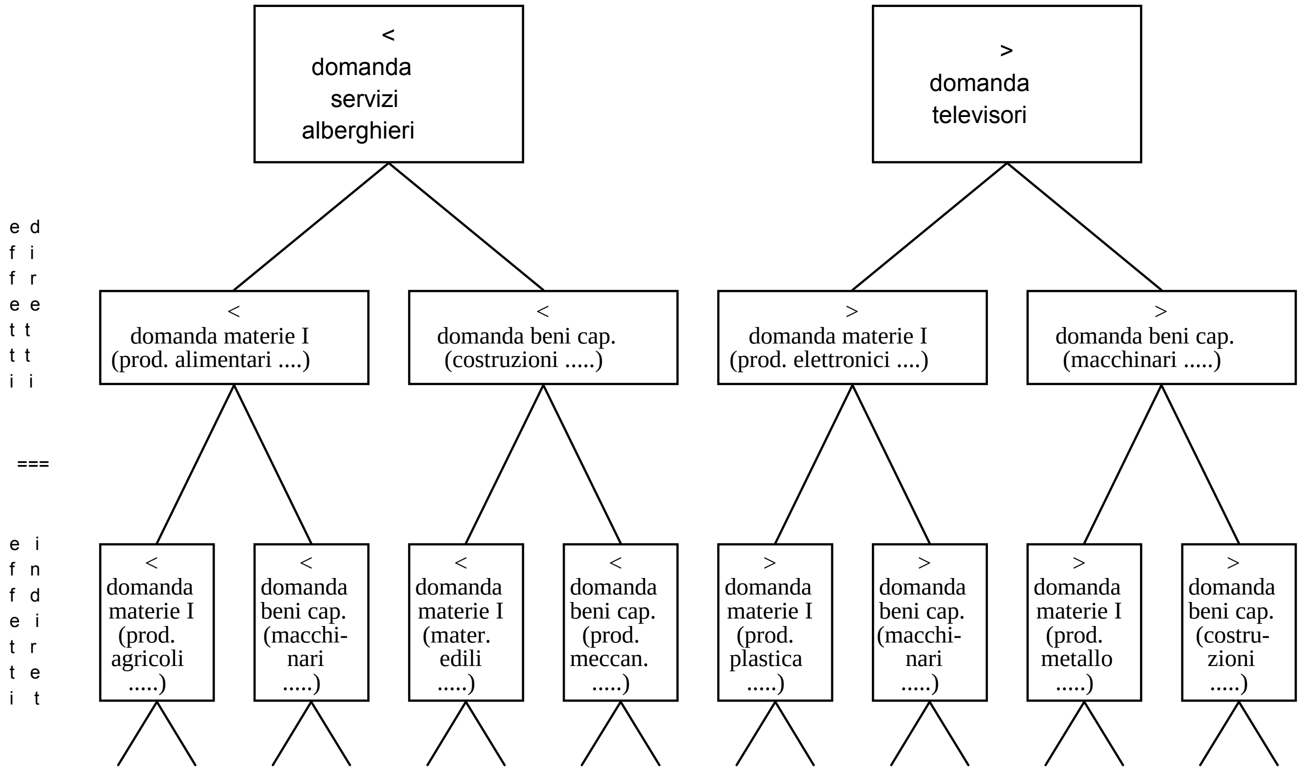
- **La conoscenza dei flussi intermedi (relazioni tra produttori) è determinante per capire la struttura ed il funzionamento del sistema produttivo.**

Esempio: tizio è solito portare la sua famiglia in vacanza in albergo spendendo X. Quest'anno decide di destinare la stessa cifra per l'acquisto di un televisore, rinunziando alle vacanze

La CN non registra alcuna variazione



Quali gli effetti della decisione di tizio?: (visti con un "microscopio" economico)
Gli imprenditori, sensibili alle fluttuazioni, aggiustano i livelli di occupazione e gli acquisti di materie prime e beni capitali ai nuovi livelli di domanda.



- **Gli impulsi posti in essere da una variazione di domanda si diffondono in tutti i settori con effetti di contagio**

- **L'entità degli effetti e la loro diffusione dipendono dal grado di interdipendenza delle varie industrie nel sistema economico**

Come analizzare le interdipendenze?

- **Strumento per l'analisi delle interdipendenze economiche è la tavola intersettoriale (o tavola delle interdipendenze settoriali o tavola input-output)**

- **La tavola è un quadro contabile che sintetizza gli scambi di beni e servizi che hanno luogo in un sistema economico all'interno dei comparti produttivi e tra produttori e settori di impiego finale**

- **Sulla base di opportune ipotesi, da schema descrittivo, che contabilizza ex-post i flussi, la tavola diviene la base di un modello interpretativo e previsivo**

LA TAVOLA COME QUADRO CONTABILE (Sistema chiuso)

Si consideri un sistema economico chiuso suddiviso in k settori produttivi (concettual-mente si può pensare ad una suddivisione in cui ciascun settore produce un solo bene)

x_i produzione totale del settore i

x_{ij} beni intermedi di tipo i utilizzati da j

z_i produzione di i destinata all'impiego finale

$z_i = c_i$ (consumi) $+ f_i$ (investimenti)

y_i valore aggiunto del settore i

$y_i = w_i$(red. lav. dip.)$+o_i$(ris. lordo gest.)$+t_i$ (imposte nette)

Settori prod. di origine	Set. prod. di destinaz. (1 ... J ... k)		Set. fin. con	Set. fin. inv		pr. tot
1						
...						
i	x_{ij}	$x_{i\cdot}$	c_i	f_i	z_i	x_i
...						
k						
Tot costi interm.	$x_{\cdot j}$	$x_{\cdot\cdot}$	C	F	Z	X
red. lav. dipend.	w_j	W				
ris. lordo gest.	o_j	O				
imposte nette	t_j	T				
va. ag. pr. merc	y_j	Y				
prod. tot. (ris.)	x_j	X				

- **La tavola I-O è la combinazione dei tre conti di CN della produzione riferiti ai singoli settori**

[1]	$x_i = \sum_j x_{ij} + z_i$	**C.to equilibrio**
[2]	$\sum_j x_{ji} + y_i = x_i$	**C.to della produzione**
[1-2]	$\sum_j x_{ji} + y_i = \sum_j x_{ij} + z_i$	**C.to risorse impieghi**
[3]	$w_i + o_i + t_i = y_i$	**C.to della distribuz. del valore aggiunto**

In termini matriciali

[1]	$x = Xu + z$	**C.to equilibrio**
[2]	$u'X + y = x$	**C.to della produzione**
[1-2]	$u'X + y = Xu + z$	**C.to risorse impieghi**
[3]	$w + o + t = y$	**C.to della distribuz. del valore aggiunto**

$X = \{x_{ij}\}$ ($k \infty k$) matrice (tavola) input-output

la sua struttura è di interesse per l'analisi del processo produttivo e mette in evidenza le interdipendenze tra settori di produzione (fabbisogni di input di ciascun settore)

Rapporti caratteristici

forma scalare | forma matriciale

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{x_j}$$

Coefficienti diretti di produzione (coefficienti di spesa): unità monetarie di produzione del settore i necessarie per ottenere una unità monetaria di produzione del settore j (esprimono il grado di dipendenza di j dai settori fornitori)

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\left(\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}$$

$$_{y}a_{ij} = \frac{y_j}{x_j}$$

Coefficienti diretti di inputs primari: unità monetarie di valore aggiunto incorporate in una unità monetaria di produzione del settore j (eventualmente distinti per componenti del valore aggiunto)

$$_{\mathbf{y}}\mathbf{A} = \mathbf{y}\left(\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}$$

$$b_{ij} = \frac{X_{ij}}{x_i}$$

Coefficienti di mercato (intermedi): unità monetarie di produzione del settore i destinate all'impiego intermedio nel settore j (esprimono il grado di dipendenza di i dai settori produttivi acquirenti)

$$\mathbf{B} = \left(\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}\mathbf{X}$$

$$_{F}b_{i} = \frac{z_i}{x_i}$$

Coefficienti di mercato (finali): unità monetarie di produzione del settore i destinate all'impiego finale (eventualmente distinti per componenti della domanda finale)

$$_{\mathbf{F}}\mathbf{B} = \left(\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}\mathbf{z}$$

Esempio numerico

Settori prod. di origine	Set. prod. destinaz. 1	2	3		imp. final	prod tot
1-Agricoltura	-	80	20	100	50	150
2-Industria	10	-	100	110	90	200
3-Altre attività	60	50	-	110	50	160
Tot costi interm.	70	130	120	320	190	510
Valore aggiunto	80	70	40	190		
prod. tot. (ris.)	150	200	160	510		

Coefficienti di spesa

	1	2	3
1	.000	.400	.125
2	.070	.000	.625
3	.400	.250	.000
Tot	.470	.650	.750
V.A.	.530	.350	.250

Coefficienti di mercato

	1	2	3		
1-Agricoltura	.000	.530	.140	.670	.330
2-Industria	.050	.000	.500	.550	.450
3-Altre attività	.380	.310	.000	.690	.310

Flussi fisici e flussi monetari

- **Concettualmente lo schema input-output presuppone che ciascun settore produca un solo bene (il sistema economico dovrebbe essere classificato in tanti settori quanti sono i beni prodotti**

- **In questa ipotesi la tavola può contenere flussi espressi in unità fisiche o in unità monetarie**

- **Nei casi concreti è inevitabile l'aggregazione che viene effettuata definendo raggrup-pamenti omogenei di produttori in relazione alla natura merceologica dei prodotti ottenuti, alle materie impiegate, alle caratteristiche del processo produttivo**

- **In conseguenza dell'aggregazione i flussi debbono essere espressi in unità monetarie (al fine di rendere sommabili grandezze espresse in unità di misura diverse)**

QUALI SONO I LEGAMI TRA TAVOLA ESPRESSA IN FLUSSI FISICI E TAVOLA ESPRESSA IN FLUSSI MONETARI?

- **Contrassegnando con un asterisco le grandezze espresse in unità fisiche, si definiscono i <u>coefficienti tecnici</u> $a_{ij}^{*} = X_{ij}^{*} / x_{j}^{*}$ che esprimono la quantità di prodotto i necessaria per ottenere un'unità di prodotto j**
- **La matrice $\mathbf{A}^{*} = \mathbf{X}^{*}\left(\hat{\mathbf{x}}^{*}\right)^{-1}$ esprime, quindi, lo stato della tecnica e le sue colonne sono le "ricette di produzione" mentre le corrispondenti colonne della matrice A, a flussi monetari, esprimono il costo di quelle ricette**
- **Indicando con p_i il prezzo unitario di i, si ha**

$$\mathbf{A} = \left\{ a_{ij} = \frac{X_{ij}^{*} p_i}{x_{j}^{*} p_j} = a_{ij}^{*} \frac{p_i}{p_j} \right\} a_{ij} = \hat{\mathbf{p}} \mathbf{A}^{*} \left(\hat{\mathbf{p}}\right)^{-1}$$

e quindi la matrice dei coefficienti di spesa dipende dalla tecnologia (A^{*}) e dal sistema dei prezzi relativi (p_i/p_j)

- **La matrice dei coefficienti di mercato, invece**

$$\mathbf{B} = \left\{ b_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i} = \frac{x_{ij}^{*} p_i}{x_{i}^{*} p_i} = \frac{x_{ij}^{*} x_{j}^{*}}{x_{j}^{*} x_i} = a_{ij}^{*} \frac{x_j}{x_i} \right\} = \left(\hat{\mathbf{x}}^{*}\right)^{-1} \mathbf{A}^{*} \hat{\mathbf{x}}^{*}$$

dipende dalla tecnologia (A^{*}) e dal livello relativo delle produzioni (x_j/x_i) ma non dai prezzi

Sistema aperto

x_{ij} beni intermedi di tipo i prodotti all'interno del sistema utilizzati nella produzione di j

m_{ij} beni intermedi di tipo i importati utilizzati nella produzione di j

$r_{ij} = x_{ij} + m_{ij}$ beni intermedi di tipo i utilizzati nella produzione di j

x_i produzione interna totale del settore i

m_i importazioni di beni di tipo i

$r_i = x_i + m_i$ risorse totali del settore i

Settori prod. di origine	Set. prod. di dest. 1 ... J ... k		Sett. finali con	inv	esp		imp tot
1 ...							
i	x_{ij}	$x_{i\cdot}$	${}_xc_i$	${}_xf_i$	${}_xe_i$	${}_xz_i$	x_i
	m_{ij}	$m_{i\cdot}$	${}_mc_i$	${}_mf_i$	${}_me_i$	${}_mz_i$	m_i
	r_{ij}	$r_{i\cdot}$	${}_rc_i$	${}_rf_i$	${}_re_i$	${}_rz_i$	r_i
... k							
Tot costi interm.	$x_{\cdot j}$	$x_{\cdot\cdot}$	C	F	E	Z	R
red. lav. dipend.	w_j	W					
ris. lordo gest.	o_j	O					
imposte nette	t_j	T					
va. ag. pr. merc	y_j	Y					
prod. tot.	x_j	X					
importazioni	m_j	M					
risorse tot.	r_j	R					

Tenendo conto dell'apertura del sistema, le relazioni che definiscono i tre conti di CN sono

$$\mathbf{x} = \mathbf{Xu} + {}_x\mathbf{z}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{Mu} + {}_m\mathbf{z}$$

[1] $\mathbf{x + m} = \mathbf{Xu} + \mathbf{Mu} + {}_x\mathbf{z} + {}_m\mathbf{z}$ C.to equilibrio

[2] $\mathbf{u'X} + \mathbf{u'M + y} = \mathbf{x}$ C.to produz.

[1-2] $\mathbf{u'X} + \mathbf{u'M + y + m} = \mathbf{Xu} + \mathbf{Mu} + {}_x\mathbf{z} + {}_m\mathbf{z}$

C.to ris.-imp.

[3] $\mathbf{w} + \mathbf{o} + \mathbf{t} = \mathbf{y}$ C.to distr. VA

Coefficienti di spesa

- Coefficienti di spesa per gli inputs di produzione interna

$$ {}_x\mathbf{A} = \{{}_x a_{ij}\} = \left\{\frac{x_{ij}}{x_j}\right\} = \mathbf{X}\left(\widehat{\mathbf{x}}\right)^{-1} $$

- Coefficienti di spesa per gli inputs di importazione

$$ {}_m\mathbf{A} = \{{}_m a_{ij}\} = \left\{\frac{m_{ij}}{x_j}\right\} = \mathbf{M}\left(\widehat{\mathbf{x}}\right)^{-1} $$

- Coefficienti di spesa per gli inputs di totali

$$ {}_r\mathbf{A} = \{{}_r a_{ij}\} = \left\{\frac{x_{ij}+m_{ij}}{x_j}\right\} = \{{}_x a_{ij} + {}_m a_{ij}\}\ \left(\mathrm{X}+\mathbf{M}\right)\left(\widehat{\mathbf{x}}\right)^{-1} $$

- Coefficienti di spesa per gli inputs di primari

$$ {}_y\mathbf{A} = \mathbf{y}\left(\widehat{\mathbf{x}}\right)^{-1} $$

  dove y può essere una matrice le cui righe sono le componenti del valore aggiunto

LA TAVOLA COME STRUMENTO PER ANALISI STRUTTURALI

- Nella tavola sono rappresentati in modo coerente gli aggregati più significativi per la descrizione del sistema produttivo

- L'informazione più specifica (aggiuntiva rispetto a quella contenuta nei conti nazionali) è quella relativa ai flussi intermedi $\{x_{ij}\}$

- Per analizzare la struttura del sistema può essere conveniente utilizzare tecniche di "vuotatura" della matrice **X** (eliminazione dei flussi di minore importanza: es. inferiori alla media-k volte lo scarto quadratico medio) e di riordinamento dei settori nel tentativo di individuare situazioni tipiche

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	□	□	□	□	□	□	□	□
2	□	□	□	□	□	□	□	□
3	□	□	□	□	□	□	□	□
4	□	□	□	□	□	□	□	□
5	□	□	□	□	□	□	□	□
6	□	□	□	□	□	□	□	□
7	□	□	□	□	□	□	□	□
8	□	□	□	□	□	□	□	□

Stretta interdipendenza: una variazione della produzione in un qualsiasi settore comporta una variazione degli inputs provenienti da tutti gli altri settori

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	□		□		□		□	□
2	□	□	□		□		□	□
3			□		□		□	□
4	□	□	□	□	□	□	□	□
5					□			
6	□	□	□		□	□	□	□
7					□		□	□
8					□			□

Situazione mista: settori interdipendenti o indipenden-ti (se $x_{ij}\approx 0$ i due settori i e j sono indipendenti)

	5	8	7	3	1	2	6	4
5	□							
8	□	□						
7	□	□	□					
3	□	□	□	□				
1	□	□	□	□	□			
2	□	□	□	□	□	□		
6	□	□	□	□	□	□	□	
4	□	□	□	□	□	□	□	□

Ordinamento gerarchico: il settore i domina j quando una variazione di produzio-ne di i genera necessaria-mente una variazione di produzione di j senza che valga il viceversa.
Ogni settore è dominato da quelli che acquistano i suoi prodotti e domina quelli dai quali acquista

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	□	□	□					
2	□	□	□					
3	□	□	□					
4	□	□	□	□	□			
5	□	□	□	□	□			
6				□	□	□	□	
7				□	□	□	□	
8						□	□	□

Ordinamento gerarchico a blocchi

- Alla tavola conviene associare un grafo di flusso che facilita l'individuazione della diversa posizione e del diverso ruolo che ciascun settore svolge

- Esempio Toscana 1975 (vedi tabella e grafo)
  - i migliori clienti sono "Altri servizi", "Tessili, e abbigliamento", "Cuoio e calzature" (settori che dominano gli altri)
  - i migliori fornitori sono "Prodotti energetici" e "Carta, chimici e gomma" (settori dominati dagli altri)

- Due interpretazioni dei "cammini" nel grafo
  - Muovendosi in senso contrario alle frecce si individuano i processi di attivazione della produzione e dell'occupazioni originati da una variazione (non occasionale) della domanda in un settore. Ad es: un aumento di domanda del settore tessile attiverà un aumento di produzione di tutti i settori collegati, con effetto proporzionale all'entità del flusso (attenzione alle importazioni!)
  - Muovendosi nel senso delle frecce si individuano le vie attraverso le quali si diffondono nel sistema aumenti di prezzo che hanno origine nei vari settori in conseguenza di aumenti di retribuzione dei fattori primari o dei prezzi all'importazione

LA TAVOLA COME BASE PER LA COSTRUZIONE DI UN MODELLO

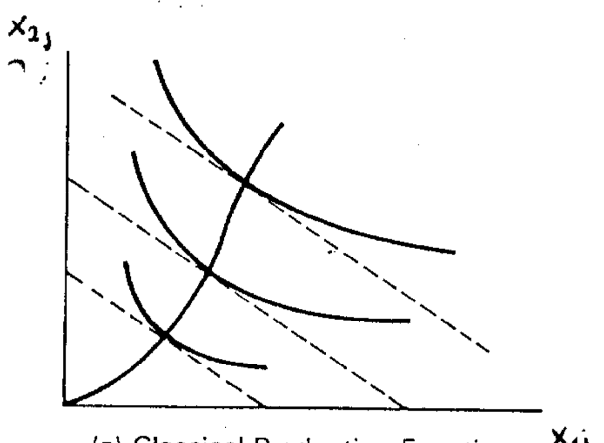
- IPOTESI: assumiamo la matrice **A** come espressione della tecnica produttiva stabile nel tempo

- Sotto questa ipotesi, la relazione

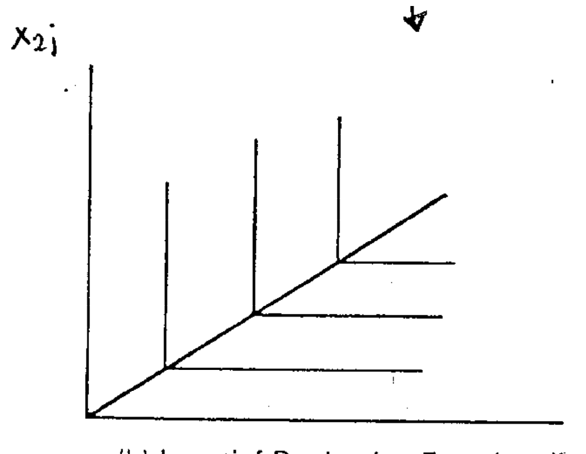
  $$\mathbf{X} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{A}\,\widehat{\mathbf{x}}$$

  può essere vista come una funzione di produzione che stabilisce il legame tra flussi di beni e servizi intermedi impiegati in un settore e la produzione di quel settore

- Si tratta di una funzione di produzione lineare che presume rendimenti di scala costanti e nessuna sostituibilità tra inputs



(a) Classical Production Function



(b) Leontief Production Function

- Consideriamo l'equazione di bilancio (conto di equilibrio) relativa ai flussi di produzione interna

$$\mathbf{x} = \mathbf{Xu} + {}_{X}\mathbf{z}$$

- Dal punto di vista contabile è un'identità ex-post. Ma se si assume la funzione di produzione prima ricordata si ha

$$\mathbf{x} = {}_{X}\mathbf{Ax} + {}_{X}\mathbf{z}$$

[1] $$(\mathbf{I} - {}_{X}\mathbf{A})\mathbf{x} = {}_{X}\mathbf{z}$$

- La [1] si configura come un sistema di equazioni di domanda. Se si suppone di co-noscere **A** (ad esempio valutata tramite una tavola empirica) e si assume la costanza temporale il sistema ha k equazioni e 2k incognite (**x** e **z**) e può essere risolto
  – fissando **x** (livello di produzione dei settori) e ricercando **z** (livelli di domanda necessari ad assorbire la produzione data)
  => fissando **z** (livello di domanda dei settori) e ricercando **x** (livelli di produzione necessari a soddisfare la domanda data)

- Se la matrice ($\mathbf{I}$-${}_{X}\mathbf{A}$) è non singolare la solu-zione per **x** è

[1bis] $$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - {}_{X}\mathbf{A})^{-1}\, {}_{X}\mathbf{z}$$

- Condizioni per l'esistenza di una soluzione
  - $a_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i,j$
  - $(1-\sum_i a_{ij}) > 0 \ \forall\, j$ (tutti i settori hanno valore aggiunto)

- Significato della matrice $(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1} = \{A_{ij}\}$
  - Per il generico settore si ha

$$x_i = \sum_j A_{ij}\ {}_xz_j$$

    dalla quale risulta che il livello di produzione di un settore è combinazione lineare dei livelli di domanda di tutti i settori

  - Il generico elemento della matrice $\{A_{ij}\}$, che assume il nome di <u>coefficiente di fabbisogno diretto e indiretto,</u> può essere scritto come

$$A_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial z_j}$$

    e indica la variazione di produzione del settore i necessaria per soddisfare un incremento unitario di domanda del settore j

- Sommando i coefficienti A_{ij}
  - $\sum_i A_{ij}$ incremento di produzione che si attiva nel sistema (tutti i settori) per soddisfare un incremento unitario di domanda del settore j
  - $\sum_j A_{ij}$ incremento di produzione che si attiva nel settore i per soddisfare un incremento unitario di domanda in tutti i settori

- Approssimaz. in serie di potenze di $(\mathbf{I}-{}_x\mathbf{A})^{-1}$

  – Consideriamo il prodotto matriciale

$$(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{A} + {}_x\mathbf{A}^2 + {}_x\mathbf{A}^3 + \ldots + {}_x\mathbf{A}^{n-1}) = (\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A}^n)$$

  Sia $N({}_x\mathbf{A}) = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ la norma di ${}_x\mathbf{A}$.

  Nel nostro caso, essendo $a_{ij} \geq 0 \ \ \forall$ i,j, e $(1-\sum_i a_{ij}) > 0 \ \forall$ j, risulta $0 \leq a_{ij} \leq N({}_x\mathbf{A}) < 1$.

  Sussite un teorema secondo il quale $[N(\mathbf{A})]^n \geq N(\mathbf{A}^n)$, per cui $0 \leq a^n_{ij} \leq N({}_x\mathbf{A}^n) \leq [N({}_x\mathbf{A})]^n < 1$.

  Per $n\emptyset\infty$ si verifica che $[N({}_x\mathbf{A})]^n \emptyset\ 0$ e quindi $N({}_x\mathbf{A}^n)\emptyset\ 0$, $a^n_{ij}\emptyset\ 0$ e ${}_x\mathbf{A}^n \emptyset\ \mathbf{0}$. Pertanto

$$(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{A} + {}_x\mathbf{A}^2 + {}_x\mathbf{A}^3 + \ldots\ ) = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{I} + {}_x\mathbf{A} + {}_x\mathbf{A}^2 + {}_x\mathbf{A}^3 + \ldots\ ) = (\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}$$

  – Inserendo questa espressione nella soluzione del sistema di equazioni di domanda [1bis] risulta

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I}+{}_x\mathbf{A}+{}_x\mathbf{A}^2+{}_x\mathbf{A}^3+\ldots\ )\ {}_x\mathbf{z} = {}_x\mathbf{z} + {}_x\mathbf{A}\ {}_x\mathbf{z} + {}_x\mathbf{A}^2\ {}_x\mathbf{z}$$

  – Per il generico settore i

$$x_i = {}_xz_i + \sum_j {}_xa_{ij}\ {}_xz_j + \sum_h {}_xa_{ih} \sum_j {}_xa_{ij}\ {}_xz_j + \ldots$$

  è il fabbisogno totale di produzione del settore i necessario a far fronte alla domanda finale diretta $({}_xz_i)$ e alle domande del bene i da parte dei settori intermedi indirettamente attivate dalla domanda finale di tutti i settori in una serie di round successivi di impatto via via decrescente sino ad una situazione di equilibrio espressa dalla matrice $(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}$

Determinazione del fabbisogno diretto ed indiretto di importazioni

Ipotizzando la proporzionalità rispetto alla produzione e la sta-bilità temporale anche per i coefficienti diretti di importazione si può determinare il fabbisogno diretto e indiretto di importa-zioni attivato da un certo livello di domanda finale.

$$\mathbf{M} = {}_m\mathbf{A}\,\widehat{\mathrm{x}}$$

è la relazione che lega la produzione agli inputs intermedi di importazione e

$$\mathbf{m} = \mathbf{Mu} = {}_m\mathbf{A}\,\widehat{\mathrm{x}}\,\mathbf{u} = {}_m\mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

il fabbisogno totale di inputs intermedi di importazione necessari al sistema per produrre **x**. Inserendo la relazione

$$\mathbf{x} = {}_m\mathbf{A}^{-1}\mathbf{m}$$

nella espressione

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}\,{}_x\mathbf{z}$$

che indica i livelli di produzione necessari a soddisfare la domanda finale di beni di produzione interna ${}_x\mathbf{z}$ si ha

$$\mathbf{m} = {}_m\mathbf{A}\,(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}\,{}_x\mathbf{z}$$

che indica il fabbisogno diretto o indiretto di importazioni necessario a soddisfare la domanda finale di beni di produzione interna ${}_x\mathbf{z}$.

Per il generico settore i

$$m_i = \sum_j {}_mA_{ij}\,{}_xz_j$$

dove ${}_mA_{ij}$ elemento generico della matrice ${}_m\mathbf{A}(\mathbf{I}-{}_x\mathbf{A})^{-1}$ indica l'incremento di importazioni di bene o servizio i necessario a soddisfare un incremento unitario di domanda finale di produzione interna del bene j.

Determinazione del fabbisogno di-retto ed indiretto di fattori primari

In modo analogo si può determinare il fabbisogno diretto e indiretto di fattori primari attivato da un certo livello di domanda finale.

$$\mathbf{Y} = {}_y\mathbf{A}\,\widehat{\mathrm{x}}$$

è la relazione che lega la produzione agli inputs di fattori primari (${}_yA_{sj}$ valore del fattore primario s necessario per produrre una unità del bene j) e

$$\mathbf{y} = \mathbf{Yu} = {}_y\mathbf{A}\,\widehat{\mathrm{x}}\,\mathbf{u} = {}_y\mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

il fabbisogno totale di fattori primari necessari al sistema per produrre **x**. Inserendo la relazione

$$\mathbf{x} = {}_y\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

nella espressione

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}\,{}_x\mathbf{z}$$

che indica i livelli di produzione necessari a soddisfare la domanda finale di beni di produzione interna ${}_x\mathbf{z}$ si ha

$$\mathbf{y} = {}_y\mathbf{A}\,(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}\,{}_x\mathbf{z}$$

che indica il fabbisogno diretto o indiretto di fattori primari necessario a soddisfare la domanda finale di beni di produzione interna ${}_x\mathbf{z}$.

Per il generico fattore primario s (lavoro, capitale, impresa)

$$y_s = \sum_j {}_yA_{sj}\,{}_xz_j$$

dove ${}_yA_{sj}$ elemento generico della matrice ${}_y\mathbf{A}(\mathbf{I}-{}_x\mathbf{A})^{-1}$ indica l'incremento di fattore primario di tipo s necessario a soddisfare un incremento unitario di domanda finale di produzione interna del bene j.

Alcune osservazioni sulle ipotesi sottostanti il modello

- La funzione di produzione ipotizzata (output proporzionale ai livelli di inputs + rendimenti di scala costanti) è poco realistica soprattutto per alcuni settori (es: servizi)

- Per stimare i coefficienti di spesa si ricorre ad una tavola empirica che sconta un certo livello di aggregazione (branche). Ciò implica che tutte le unità produttive classificate in una branca adottino la stessa tecnica produttiva (nessuna influenza della dimensione e stessa combinazione di inputs intermedi e primari)

- L'ipotesi di stabilità temporale dei coeffi-cienti implica
  - assenza di reazione alle variazioni nel sistema dei prezzi relativi (nessuna sostituzione tra gli inputs intermedi o tra inputs intermedi e fattori primari)
  - stabilità del product mix di ogni branca

- Le ipotesi sono ancora più irrealistiche se riferite ai coefficienti di importazione o di inputs dei fattori primari

Effetto dell'aggregazione nel modello I-O

- Ammettiamo che il sistema economico sia adeguatamente rappresentato da una tavola I-O a k settori e supponiamo di volerlo rappresentare con una tavola di dimensioni ridotte a soli m settori (m<k)

- Indichiamo con **T** un operatore matriciale m∞k del tipo

$$\mathbf{T} = \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Schema contabile a k settori		Schema contabile a m settori
$\mathbf{X}$	matrice dei flussi	$\mathbf{X}^* = \mathbf{T\,X\,T'}$
$\mathbf{x}$	vettore di produzione	$\mathbf{x}^* = \mathbf{T\,x}$
$\mathbf{A} = \mathbf{X}\,(\widehat{x})^{-1}$	coefficienti di spesa	$\mathbf{A}^* = \mathbf{X}^*\,(\widehat{x^*})^{-1}$

- Pur essendo derivate dallo stesso schema contabile le due matrici **A** e $\mathbf{A}^*$ sono stime dei parametri di due diversi modelli i-o

- Supponiamo di voler determinare il fabbisogno diretto e indiretto di produzione necessario per soddiffare un dato livello di domanda finale **z** ($\mathbf{z}^* = \mathbf{Tz}$)

- Secondo il livello di aggregazione prescelto si ha

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{z} \qquad\qquad \mathbf{x}^{*} = \mathbf{X}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{*})^{-1}\mathbf{z}^{*}$$

e a meno di casi particolari (aggregazione di settori con identica struttura dei costi o vettore di domanda proporzionale a quello utilizzato per la costruzione della tavola) risulta

$$\mathbf{x}^{*} \neq \mathbf{Tx}$$

- La differenza

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}^{*} - \mathbf{Tx}$$

  costituisce l'errore di aggregazione

- Si può eventualmente valutare tra varie aggregazioni possibili (configurazioni alter-native dalla matrice T) quale minimizza una opportuna misura sintetica dell'errore

Ulteriori applicazioni del modello I-O

ANALISI DI IMPATTO DELLA DOMANDA PER TIPO DI IMPIEGO FINALE O DI FATTORI PRIMARI

- Le analisi presentate sono volte a valutare l'impatto della domanda (per settori di origine) sulla produzione e sui fattori primari dei vari settori e hanno come base la matrice dei coefficienti di produzione ${}_{x}\mathbf{A}$
- Altre indicazioni possono trarsi dall'analisi della domanda per tipo di destinazione finale o dei fattori primari per tipo di fattore o della struttura degi outputs (matrice dei coefficienti di mercato)

- Siano

Y matrice degli imputs primari e importazioni $\{y_{sj}\}$ con s=tipo di fattore primario: redditi lavoro, risultato lordo di gestione, imposte, importazioni (cornice bassa della tavola)

Z matrice degli impieghi finali $\{z_{ih}\}$ con h=tipo di impiego: consumi, investimenti, esportazioni (cornice destra della tavola)

$\mathbf{z} = \mathbf{Zu}$	domanda finale per settore di origine
$\mathbf{f}' = \mathbf{u}'\mathbf{Z}$	domanda finale per tipo di impiego
$\mathbf{g} = \mathbf{Yu}$	inputs primari per tipo
$\mathbf{y}' = \mathbf{u}'\mathbf{Y}$	inputs primari per settore destinazione
${}_{x}\mathbf{B} = \left(\widehat{\mathbf{x}}\right)^{-1}\mathbf{X}$	$\{{}_{x}b_{ij}\}$ coeff. di mercato intermedi
${}_{z}\mathbf{B} = \left(\widehat{\mathbf{x}}\right)^{-1}\mathbf{Z}$	$\{{}_{z}b_{ih}\}$ coeff. di mercato finali
${}_{y}\mathbf{B} = \left(\widehat{\mathbf{g}}\right)^{-1}\mathbf{Y}$	$\{{}_{z}b_{sj}\}$ coeff. di fabbisogno di fattori primari
${}_{z}\mathbf{A} = \mathbf{Z}\left(\widehat{\mathbf{f}}\right)^{-1}$	$\{{}_{z}a_{ih}\}$ coeff. di mercato per tipo di impiego

equazione di bilancio

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{u} + \mathbf{Z}\mathbf{u} = {}_x\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{u}$$

produzione settoriale necessaria a soddisfare un dato livello di domanda per settore

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}{}_z\mathbf{A}\mathbf{f}$$

produzione settoriale necessaria a soddisfare un dato livello di domanda per tipo di impiego

$$(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}{}_z\mathbf{A} = \mathbf{C} = \{c_{ih}\}$$

c_{ih} incremento di produzione del settore i necessaria a soddisfare un incremento unitario di domanda finale di impiego h

equazione di costo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}'\mathbf{X} + \mathbf{u}'\mathbf{Y} = \mathbf{x}'{}_x\mathbf{B} + \mathbf{y}'$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}'\mathbf{Y}(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{B})^{-1}$$

produzione settoriale necessaria a retribuire un dato livello di fattori primari per settore

$$\mathbf{x}' = \mathbf{g}'{}_y\mathbf{B}(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{B})^{-1}$$

produzione settoriale necessaria a retribuire un dato livello di fattori primari per tipo di fattore

$${}_y\mathbf{B}(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{D} = \{d_{sj}\}$$

d_{sj} incremento di produzione del settore j necessaria a retribuire un incremento unitario di fattore primario di tipo s

ANALISI DI IMPATTO AMBIENTALE

- A partire dai primi anni 70 si sono avuti tentativi di utilizzare il modello I-O per verificare effetti di inquinamento ambientale legati ad un certo sistema di produttivo

- Supponiamo di disporre di una matrice di "inquinamento" $\mathbf{V} = \{v_{sj}\}$ il cui generico elemento indica la quantità di sostanza inquinante di tipo s (es. nitrati) generata da una lira di produzione del settore j. Nell'ipotesi di dipendenza lineare tra fattore inquinante e produzione si ha

$\mathbf{v} = \mathbf{Vx}$ — vettore di inquinamento associato al vettore di produzione $\mathbf{x}$

$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}\mathbf{z}$ — produzione necessaria a sostenere il livello di domanda $\mathbf{z}$

$\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}\mathbf{z}$ — inquinamento attivato dal livello di domanda $\mathbf{z}$

$\mathbf{V}(\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{Q} = \{q_{sj}\}$ — matrice degli effetti diretti ed indiretti di inquinamento. Il generico elemento indica l'incremento di fattore inquinante di tipo s generato da un incremento unitario di domanda del settire j

- In modo analogo si può analizzare l'impatto della domanda su qualunque altro fattore si supponga dipendere linearmente dalla attività interindustriale

INTRODUZIONE DI COMPONENTI DINAMICHE

- Si possono introdurre valutazioni su evoluzione temporale dei coefficienti di fabbisogno (mutamenti tecnologici e/o economici)

- Oppure ipotizzare sentieri evolutivi della domanda finale per determinare le traiettorie di otput implicate (attenzione ai limiti all'espansione del sistema legate agli investimenti)

ANALISI REGIONALI E MULTIREGIONALI

- Comportano la distinzione dei flussi intersettoriali per regione di origine e destinazione

- La maggior difficoltà è legata alla disponibilità di informazioni statistiche (i tentativi fatti si basano su ipotesi drasticamente semplificatrici)

ANALISI DELL'INFLAZIONE (diffusione effetto prezzi)

- generalmente basate sul modello statico e nell'ipotesi di traslatività completa dell'aumento dei costi sui prezzi (ipotesi debole in sistemi economici aperti)

LA COSTRUZIONE DI UNA TAVOLA METODI E PROBLEMI

- La realizzazione di una tavola I-O si presenta come un'opera di paziente ricostruzione di un mosaico e richiede tempi lunghi

- Il Italia si sono costruite tavole nazionali con riferimento al 1959 e 1965 con criteri e defnizioni non standardizzati

- A partire dal 1970 si è adottato lo schema SEC e la prima tavola costruita con i criteri europei è quella del 1975. Di norma, si costruisce una tavola "diretta" ogni 5 anni. Altre indirette derivano dall'aggiornamento delle tavole dirette secondo opportune ipotesi

- Vediamo quali sono le caratteristiche della tavola italiana con riguardo a
  - CONCETTI E DEFINIZIONI
  - METODI DI CALCOLO

CONCETTI E DEFINIZIONI

Aggregazione

- Attualmente la tavola è a 92 branche
- Le branche vengono determinate aggregando produttori con riferimento all'unità locale e sulla base di un criterio di prodotto prevalente
- L'aggregazione comporta che i flussi siano al lordo dei reimpieghi di branca che si generano per scambi tra produttori appartenenti alla stessa branca (diagonale non vuota)

Concetto di produzione distribuita

- Il totale di ciascuna riga fa riferimento alla produzione del prodotto di branca distribuita da quella branca ai vari impieghi (intermedi e finali) e differisce dalla produzione effettiva ottenuta in ogni branca (totale di colonna) a causa di
  - produzioni congiunte: sottoprodotti di un processo produttivo di una branca che sono nel contempo prodotto principale di un'altra (es: idrogeno dell'industria petrolifera identico a quello ottenuto dalla chimica di base)
  - produzioni similari: beni che hanno identica utilizzazione ma ottenuti con materie prime differenti (es: calzature in gomma e calzature in cuoio)
- Dovendo il totale di colona essere uguale a quello di riga, si trasferisce alla branca di distribuzione la parte della produzione ottenuta in altre branche

	A		B		Totale impieghi
A					a
B					b+b*
Prod. effettiva	a+b*		b		
Trasferimenti	-b*		+b*		
Prod distribuita	a		b+b*		

- Per valutare il fabbisogno diretto e indiretto di produzione necessario a soddisfare un dato livello di domanda

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - {}_x\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{t})$$

dove $\mathbf{t}$ è il vettore dei trasferimenti ($\sum t_i = 0$)

Importazioni

- In ciascuna riga le importazioni sono classificate per branca che produce o produrrebbe i beni in Italia. Nella parte bassa della cornice figurano le importazioni di beni e servizi classificate secondo lo stesso criterio

Valutazione dei flussi

- I flussi sono valutati a prezzi ex-fabrica pari ai prezzi alla produzione aumentati delle imposte indirette nette per i beni di produzione interna e valutazione cif aumentata delle imposte indirette all'importazione per i beni importati
- La valutazione è fatta scremando dai prezzi di mercato pagati dai compratori i margini commerciali e di trasporto che vengono inseriti nella branca del commercio e trasporti. Quindi l'acquisto finale di un bene da parte di una famiglia, ad esempio, è contabilizzato come acquistato in parte dalla branca produttrice e in parte dal commercio e trasporti

- In questo modo si evita di attribuire ad una branca introiti che di fatto non le competono (si pensi alla forte differenza tra prezzi alla produzione e alla vendita dei prodotti agricoli)

METODI DI CALCOLO

A Flussi interindustriali	B Impieghi finali
C Valore aggiunto	
D Risorse	

Sezione D

- I flussi valutati per primi sono quelli della sazione D contenente la produzione al costo dei fattori, le importazioni e le imposte indirette

- Punto debole della valutazione sono le integrazioni necessarie per valutare la produzione delle piccole imprese

Sezione B

- La seconda fase di costruzione prevede la valutazione dei flussi relativi agli impieghi finali: consumi, investimenti, variazione scorte, esportazioni

- la classificazione dei dati provenienti da indagini è di tipo funzionale (per settore di destinazione gli investimenti, per gruppi di bisogni i consumi) e deve essere convertita in una classificazione per branche di origine dei beni.

- Non agevole la conversione tra prezzi di mercato e ex-fabrica

- Punto debole della valutazione sono le variazione di scorte per le quali mancano quasi totalmente le informazioni

Sezione C ed A

- La determinazione del VA per branca (sez. C) è basata prevalentemente sull'indagine del prodotto lordo in un'ottica che vede il VA come differenza tra valore della produzione e costi

- Successivamente si distribuisce il totale costi per colonna (sez. A)

Quadratura

- Ovviamente una procedura di valutazione così complessa porta a totali di riga e colonna che non bilanciano

- La quadratura si ottiene in base ad un procedimento che ripartisce i residui in base ad una matrice di pesi che rappresentano una sorta di voto di inattendibilità delle singole valutazioni (metodo di Stone-Champernown-Meade). Ad es., se ad un aggregato si dà peso nullo questo non viene toccato dal procedimento di quadratura

Tavola I-O dell'Italia a prezzi ex-fabrica 1991

		Agricoltura	Industria	Commerc.	Trasporti	Credito	Altri servizi	Tot	Consumi	Investimenti	Var scorte	Esportazioni	Tot	Tot Impieghi
1. Agricoltura	P	10	28	4	..	..	1	43	20	..	1	6	27	**70**
	I	1	11	1	..	..	..	13	4	..	..	-	4	**17**
	T	11	39	5	..	..	1	56	24	..	1	6	31	**87**
2. Industria	P	8	342	49	22	2	61	484	271	214	5	194	684	**1168**
	I	4	126	6	1	..	4	141	42	36	1	..	79	**220**
	T	12	468	55	23	2	65	625	313	250	6	194	763	**1388**
3. Commercio	P	3	63	21	8	1	12	108	276	19	-	21	316	**424**
	I	-	7	2	..	-	..	9	5	1	-	-	6	**15**
	T	3	70	23	8	1	12	117	281	20	-	21	322	**439**
4. Trasporti	P	1	38	13	9	2	7	70	39	4	-	26	69	**139**
	I	-	2	..	4	-	1	7	-	1	-	-	1	**8**
	T	1	40	13	13	2	8	77	39	5	-	26	70	**147**
5. Credito e ass.	P	1	9	6	1	73	5	95	4	-	-	4	8	**103**
	I	-	1	1	..	..	..	2	1	1	-	-	2	**4**
	T	1	10	7	1	73	5	97	5	1	-	4	10	**107**
6. Altri servizi	P	1	40	27	6	19	32	125	475	5	-	9	489	**614**
	I	..	8	2	1	..	2	13	5	-	-	-	5	**18**
	T	1	48	29	7	19	34	138	480	5	-	9	494	**632**
7. Tot. Costi intermedi	P	24	520	120	46	97	118	985	1085	242	6	260	1593	**2518**
	I	5	155	12	6	..	7	185	57	39	1	..	97	**282**
	T	29	675	132	52	97	125	1110	1142	281	7	260	1690	**2800**

	Agricoltura	Industria	Commerc.	Trasporti	Credito	Altri servizi	Tot
Red lavoro dip	*15*	*226*	*66*	*54*	*38*	*249*	*648*
Ris lordo gest	*35*	*174*	*204*	*51*	*-40*	*222*	*646*
8. VA costo fattori	50	400	270	105	-2	471	1294
9. Prod costo fatt. (7+8)	79	1075	402	157	95	596	2404
10. Trasferim.	-5	5	..	..	-	-	-
11. Imposte	1	96	25	5	8	18	153
12. Contributi	5	8	3	23	-	-	39
13. Prod distrib. (9+10+11-12)	**70**	**1168**	**424**	**139**	**103**	**614**	**2518**
14. Importazioni (con imposte)	**17**	**220**	**15**	**8**	**4**	**18**	**282**
Totale risorse (13+14)	**87**	**1388**	**439**	**147**	**107**	**632**	**2800**

Fabbisogno diretto di produzione interna necessario per soddisfare una domanda di 1 milione di lire di beni e servizi interni.

Matrice $_{x}\mathbf{A}$

Settori di origine	Settori di destinazione 1	2	3	4	5	6
1. Agricolt.	142857	23973	9434	-	-	1629
2. Industria	114286	292808	115566	158273	19417	99349
3. Commerc	42857	53938	49528	57554	9709	19544
4. Trasporti	14286	32534	30660	64748	19417	11401
5. Credito	14286	7705	14151	7194	708738	8143
6. Altri serv	14286	34247	63679	43165	184466	52117
Totale	342857	445205	283019	330935	941748	192182

Fabbisogno diretto e indiretto di produzione interna necessario per soddisfare una domanda di 1 milione di lire di beni e servizi interni.

Matrice $(\mathbf{I} - {}_{x}\mathbf{A})^{-1}$

Settori di origine	Settori di destinazione 1	2	3	4	5	6
1. Agricolt.	1173538	41946	17615	8568	8357	6951
2. Industria	215664	1459491	202514	268692	224994	162681
3. Commerc	68570	90085	1069665	83128	68230	33201
4. Trasporti	29645	56241	44806	1083156	90547	20675
5. Credito	68581	48431	61913	40351	3464572	36720
6. Altri serv	44781	71401	93532	72600	691197	1071283
Totale	1600780	1767594	1490044	1556495	4547898	1331511

COSTRUZIONE DI UNA TAVOLA I-O CON METODO INDIRETTO – METODO RAS

Per aggiornare una tavola (o regionalizzare una tavola nazionale) si ricorre spesso al metodo indiretto che consiste nel valutare le cornici del tempo (luogo) di riferimento e utilizzare i flussi interindustriali della tavola disponibile come tavola base (luogo o tempo base) sulla quale operare un riproporzionamento

Metodo RAS (Stone 1960)

Si supponga di disporre di una matrice $\mathbf{A}_0$ di coefficienti di spesa calcolata al tempo (luogo) base 0 e la si voglia aggiornare al tempo (luogo) di riferimento 1. Si voglia cioè stimare $\mathbf{A}_1$.

Si supponga inoltre di avere le seguenti informazioni relative al tempo (luogo) 1

$\mathbf{x}_1$ vettore della produzione settoriale

$\mathbf{z}_1$ vettore domanda finale

$\mathbf{y}_1$ vettore del valore aggiunto

Si possono calcolare, con riferimento al tempo 1

$\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{u} = \mathbf{A}_1\hat{\mathbf{x}}_1\mathbf{u} = \mathbf{U}$ impieghi intermedi (k∞1)

$\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{u}'\mathbf{X}_1 = \mathbf{u}'\mathbf{A}_1\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{T}$ costi intermedi (1∞k)

Il metodo RAS è una procedura iterativa che permette di stimare $\mathbf{A}_1$ mantenedo la coerenza dei vincoli dati dal totale di riga e di colonna $\mathbf{U}$ e $\mathbf{T}$

1° passo

1a)	$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{x}}_1 \mathbf{u}$	Stima di $\mathbf{U}$ a partire da $\hat{\mathbf{x}}_1$ e da $\mathbf{A}_0$. In genere $\mathbf{U}^{(1)} \neq \mathbf{U}$ e quindi $\mathbf{A}_0$ non è coerente rispetto al totale di riga
1b)	$\mathbf{R}^{(1)} = \hat{\mathbf{U}} \, (\hat{\mathbf{U}}^{(1)})^{-1}$	Coefficiente di riproporzionamento per riga
1c)	$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}^{(1)}$ è stima di $\mathbf{A}_1$ ed è coerente rispetto al totale di riga
1d)	$\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{u}' \mathbf{A}^{(1)} \hat{\mathbf{x}}_1$	Stima di $\mathbf{T}$ a partire da $\hat{\mathbf{x}}_1$ e da $\mathbf{A}^{(1)}$. In genere $\mathbf{T}^{(1)} \neq \mathbf{T}$ e quindi $\mathbf{A}^{(1)}$ non è coerente rispetto al totale di colonna
1e)	$\mathbf{S}^{(1)} = \hat{\mathbf{T}} \, (\hat{\mathbf{T}}^{(1)})^{-1}$	Coefficiente di riproporzionamento per colonna
1f)	$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{A}_0 \mathbf{S}^{(1)}$	$\mathbf{A}^{(2)}$ è stima di $\mathbf{A}_1$ ed è coerente rispetto al totale di colonna

La coerenza in 1c) è verificata da

$$\mathbf{A}^{(1)} \hat{\mathbf{x}}_1 \mathbf{u} = \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{x}}_1 \mathbf{u} = \hat{\mathbf{U}} (\hat{\mathbf{U}}^{(1)})^{-1} \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{x}}_1 \mathbf{u} = \hat{\mathbf{U}} \, (\hat{\mathbf{U}}^{(1)})^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{(1)} \mathbf{u} = \mathbf{U}$$

La coerenza in 1f) è verificata da

$$\mathbf{u}' \mathbf{A}^{(2)} \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{u}' \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{S}^{(1)} \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{u}' \mathbf{A}^{(1)} \hat{\mathbf{x}}_1 (\hat{\mathbf{T}}^{(1)})^{-1} \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{u}' \, \hat{\mathbf{T}}^{(1)} (\hat{\mathbf{T}}^{(1)})^{-1} \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$$

Alla fine del primo passo si dispone di una matrice $\mathbf{A}^{(2)}$ che è certamente coerente con il totale di colonna ma deve essere ricontrollata per riga.

Si riparte quindi come in 1a) sostituendo $\mathbf{A}_0$ con $\mathbf{A}^{(2)}$

2° passo

2a) $\mathbf{U}^{(2)}= \mathbf{A}^{(2)}\widehat{\mathbf{x}}_1\mathbf{u}$

Stima di $\mathbf{U}$ a partire da $\widehat{\mathbf{x}}_1$ e da $\mathbf{A}^{(2)}$. In genere $\mathbf{U}^{(2)} \neq \mathbf{U}$ e quindi $\mathbf{A}^{(2)}$ non è coerente con $\mathbf{A}_1$ rispetto alle righe

2b) $\mathbf{R}^{(2)}= \widehat{\mathbf{U}}\,(\widehat{\mathbf{U}}^{(2)})^{-1}$

Coefficiente di riproporzionamento per riga

2c) $\mathbf{A}^{(3)}= \mathbf{R}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)}$

$\mathbf{A}^{(3)}$ è stima di $\mathbf{A}_1$ ed è coerente rispetto al totale di riga

2d) $\mathbf{T}^{(2)}= \mathbf{u}'\mathbf{A}^{(3)}\widehat{\mathbf{x}}_1$

Stima di $\mathbf{T}$ a partire da $\widehat{\mathbf{x}}_1$ e da $\mathbf{A}^{(3)}$. In genere $\mathbf{T}^{(2)} \neq \mathbf{T}$ e quindi $\mathbf{A}^{(3)}$ non è coerente con $\mathbf{A}_1$ rispetto alle colonne

2e) $\mathbf{S}^{(2)}= \widehat{\mathbf{T}}\,(\widehat{\mathbf{T}}^{(2)})^{-1}$

Coefficiente di riproporzionamento per colonna

2f) $\mathbf{A}^{(4)}=\mathbf{A}^{(3)}\mathbf{S}^{(2)}=\mathbf{R}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{S}^{(2)}$
$= \mathbf{R}^{(2)}\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{A}_0\mathbf{S}^{(1)}\mathbf{S}^{(2)}$

$\mathbf{A}^{(4)}$ è stima di $\mathbf{A}_1$ ed è coerente rispetto al totale di colonna

Alla fine del secondo passo si dispone di una matrice $\mathbf{A}^{(4)}$ che è certamente coerente con il totale di colonna ma deve essere ricontrollata per riga.

Si riparte quindi come in 2a) sostituendo $\mathbf{A}^{(2)}$ con $\mathbf{A}^{(4)}$

In generale, all'n-esimo passo si dispone di una matrice $\mathbf{A}^{(2n)}$ che risulta

$$\mathbf{A}^{(2n)} = \mathbf{R}^{(n)}\mathbf{R}^{(n-1)}\ldots\mathbf{R}^{(1)}\,\mathbf{A}_0\,\mathbf{S}^{(1)}\ldots\mathbf{S}^{(n-1)}\mathbf{S}^{(n)}$$

ovvero indicando con

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(n)}\mathbf{R}^{(n-1)}\ldots\mathbf{R}^{(1)} \quad \text{e con} \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^{(1)}\ldots\mathbf{S}^{(n-1)}\mathbf{S}^{(n)}$$

$$\mathbf{A}^{(2n)} = \mathbf{R}\,\mathbf{A}_0\,\mathbf{S}$$

PROBLEMI

- La procedura converge?
  Non è dimostrabile analiticamente ma solo sperimental-mente

- Quando arrestarsi?
  Dipende dal grado di approssimazione voluto. Di solito si continua sino a che scelto un ε risulta

$$|U_i - U_i^{(n)}| \le \varepsilon \;\forall\, i$$
$$|T_i - T_i^{(n)}| \le \varepsilon \;\forall\, i$$

CARATTERISTICHE FORMALI DEL METODO

- Preservazione dei segni
  I coefficienti rimangono non negativi e se $a_{ij}^{(0)} = 0$ anche $a_{ij}^{(2n)} = 0$

- Se si hanno informazioni su alcuni coefficienti al tempo 1 è possibile applicare il metodo ai soli coefficienti non noti.
  A tal fine è sufficiente definire la matrice $\mathbf{K}$ che ha tutti elementi pari a 0 tranne quelli noti e la matrice $\mathbf{A}''_0$ che è ottenuta da $\mathbf{A}_0$ ponendo uguali a 0 i coefficienti corrispondenti agli elementi non nulli di $\mathbf{K}$
  Si applica poi il metodo RAS alla matrice $\mathbf{A}''_0$ (modificando opportunamente $\mathbf{U}$ e $\mathbf{T}$) e si ottiene la stima di $\mathbf{A}_1$ come

$$\mathbf{A}^{(2n)} = \mathbf{K} + \mathbf{R}\,\mathbf{A}''_0\,\mathbf{S}$$

- Il metodo può essere visto come la ricerca di un ottimo condizionato: ricerca di una matrice $\mathbf{A}^{(2n)}$ che si discosto il meno possibile da $\mathbf{A}_0$ condizionatamente alle informazioni disponibili $\mathbf{U}$ e $\mathbf{T}$ (vincoli) riferiti al tempo 1

UNA POSSIBILE INTERPRETAZIONE ECONOMICA

- Nell'espressione

$$\mathbf{A}^{(2n)} = \mathbf{R}\,\mathbf{A}_0\,\mathbf{S}$$

le matrici **R** ed **S** sono diagonali per cui il generico elemento r_{ii} di **R** moltiplica ciascun elemento della riga i di $\mathbf{A}_0$ e il generico elemento s_{jj} di **S** moltiplica ciascun elemento della colonna j di $\mathbf{A}_0$ risultando

$$\mathbf{A}^{(2n)} = \{a_{ij}^{(2n)} = r_{ii} a_{ij}^{(0)} s_{jj}\}$$

- In altri termini si applica una variazione proporzionale uniforme r_{ii} ai coefficienti di spesa di una stessa riga e una variazione proporzionale uniforme s_{jj} ai coefficienti di spesa di una stessa colonna

R (riproporzionamento per righe) sarebbe legata ad <u>effetti di sostituzione</u> tra inputs intermedi. Ad esempio, il diffondersi della plastica in sostituzione del metallo in tutti i processi produttivi implicherebbe che tutti i coefficienti a_{ij} della riga della plastica (i=plastica) crescessero (ad es. moltiplicati per 1,4) mentre tutti gli a_{sj} della riga del metallo (s=metallo) diminuissero (ad es. moltiplicati per 0,8)

S (riproporzionamento per colonne) può essere vista come legata ad <u>effetti di fabbricazione</u> e rifletterebbe variazioni tra proporzioni di inputs intermedi e fattori primari. Ad esempio, una modifica nel processo produttivo del settore j che implicasse un maggiore investimento in capitale e/o manodopera e minor proporzione di inputs intermedi si rifletterebbe in una riduzione proporzionale di tutti gli a_{ij} della colonna j.